51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Oberstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de" – Aufgabenblatt für den 17. April 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 14. April 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 17. April 2020 von 15:30–17:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Der Punkt E liegt auf der Seite AD des Quadrats $ABCD$. Der Schnittpunkt von AC mit BE sei S. Die Dreiecke ESC, BCS, CDE ASE und ABS heißen in dieser Reihenfolge A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5.
Zeige, dass für die Flächeninhalte gilt

$$|A_1| = |A_5| \quad \text{und} \quad |A_3| + |A_4| = |A_2|,$$

wenn E
(i) der Halbierungspunkt (ii) ein beliebiger Punkt
von AD ist.

Aufgabe 2. Seien a und b positive reelle Zahlen mit $a \neq b$.
Zeige, dass

$$a^4 + 3b^4 < 4ab^3$$

Aufgabe 3. Seien a, b und c positive reelle Zahlen mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n das Tripel (a^n, b^n, c^n) Seitenlängen eines Dreiecks sind.
Zeige, dass das Dreieck gleichschenkelig ist.

Aufgabe 4. Zeige: Für $A > B \geq 0$ und $n \geq 2$ gilt:

$$n \cdot (A - B) \cdot B^{n-1} < A^n - B^n < n \cdot (A - B) \cdot A^{n-1}$$

Aufgabe 5. Löse in den nicht negativen ganzen Zahlen

$$k^2 = 21608 + 6^n$$

Aufgabe 6. Löse in den reellen Zahlen die Gleichung

$$x + |x| + [x] + \operatorname{sgn}(x) = 2$$

($[x]$ ist definiert als die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.)

Aufgabe 7. Für positive Zahlen a, b mit $a^3 + b^3 = a - b$ gilt:

$$a^2 + b^2 < 1$$

Aufgabe 8. Multipliziert man

$$(1 - x + x^2 - + \ldots - x^{99} + x^{100}) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots + x^{99} + x^{100})$$

aus, so sind alle Koeffizienten der ungeraden Potenzen Null.
Zeige dies.

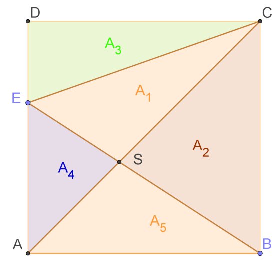
Aufgabe 9. Sei $k \geq 1$ eine positive ganze Zahl.
Zeige:

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+k)!} < \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1.

- $|AEC| = |AEB|$
- Der Teppich BCE und der Teppich ABC überlappen in BCS. Somit ist BCS flächengleich mit der freien Fläche $(|A_3| + |A_4|)$.
- Die beiden Teppiche bedecken die Quadratflächen vollständig (siehe Carpets Theorem).
- Wenn (ii) gelöst ist, so auch (i)



Aufgabe 2. Fallunterscheidung, $a > b$ bzw. $a < b$.

Aufgabe 3. o.B.d.A. kann man annehmen, dass $a \geq b \geq c > 0$ gilt.
Hier kommt die Dreiecksungleichung zum Zug:
Aus $c^n + b^n > a^n$ folgt $c^n > a^n - b^n = (a-b) \cdot (\dots)$. Diese rechte Klammer ist $\geq nb^{n-1} \geq nc^{n-1}$.

Aufgabe 4. Faktorisiere den mittleren Ausdruck:
$A^n - B^n = (A-B) \cdot (A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$

Aufgabe 5. Betrachte die Gleichung (mod 3) oder (mod 6).

Aufgabe 6. Fallunterscheidung: $x < 1$, $0 < x < 1$ usw.

Aufgabe 7. Zerlege $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = (a-b)$

Aufgabe 8. Die Summenformel der endlichen geometrischen Reihe lautet

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{q - 1}$$

Für $0 < q < 1$ lautet die Summenformel der unendlichen geometrischen Reihe:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q}$$

Für die erste Klammer wähle $q = -x$, für die zweite Klammer wähle $q = x$. Dann ist das Ausmultiplizieren der beiden Klammern leicht.

Aufgabe 9.
Für $0 < q < 1$ gilt:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^k < \frac{1}{1-q}$$

da einige positive Summanden wegfallen.
Weiters: $\frac{1}{(n+2)(n+3)} < \frac{1}{(n+2)^2}$.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

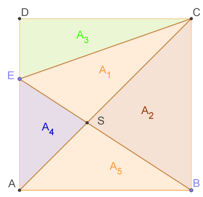
(i) Das Dreieck EAC ist flächengleich dem Dreieck EAB. Nimmt man jeweils EAS weg, so bleiben die beiden flächengleichen Dreiecke $ESC = A_1$ und $ABS = A_5$ übrig. Somit gilt $|A_1| = |A_5|$.

(ii) Sei $\mathbf{A}$ der Inhalt des Quadrats. Es gilt:

$$|A_3| + |A_4| = \frac{\mathbf{A}}{2} - |A_1|$$
$$|A_5| + |A_2| = \frac{\mathbf{A}}{2}$$
$$|A_2| + |A_1| = \frac{\mathbf{A}}{2}$$

Somit ergibt sich die gewünschte Aussage.

Der **Teppichüberdeckungssatz** lautet:
*L*ässt sich ein Rechteck mit zwei Teppichen so überdecken, dass genau die gesamte Fläche bedeckt wird, so gilt: Wenn die Teppiche verschoben werden und beide weiterhin nur Teile des Rechtecksbereichs abdecken, so ist der Überlappungsbereich genauso groß wie der durch die Verschiebung frei werdende Bereich.



Teppich 1: BCE
Teppich 2: ABC
Überlappungsbereich A_2
Frei gewordene Fläche: $|A_3| + |A_4|$

Aufgabe 2.

1. Lösung:

$$a^4 + 3b^4 > 3ab^3 + ab^3$$
$$\Leftrightarrow a(a^3 - b^3) + 3b^3(b - a) > 0$$
$$\Leftrightarrow a(a - b)(a^2 + ab + b^2) - 3b^3(a - b) > 0$$
$$\Leftrightarrow (a - b) \cdot (a^3 + a^2b + ab^2 - 3b^3) > 0$$

$a > b$: Dann gilt: $a^3 > b^3$, $a^2b > b^3$ und $ab^2 > b^3$. Also ist auch die zweite Klammer positiv und somit auch die linke Seite der Gleichung.

$b < a$: Gleiche Vorgangsweise, aber diesmal sind beide Klammern negativ und somit das Produkt wiederum positiv.

2. Lösung: Beide Seiten der Ungleichung stellen vierte Potenzen dar. Division durch den positiven Faktor $4ab^3$ liefert

$$\frac{a^4}{4ab^3} + \frac{3b^4}{4ab^3} > 1$$

Wir setzen $0 < \frac{a}{b} := x$ (mit $x \neq 1$ da $a \neq b$) ein und erhalten

$$\frac{x^3}{4} + \frac{3}{4x} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 4x + 3 > 0$$

Faktorisieren führt auf $(x-1)^2 \cdot (x^2 + 2x + 3) > 0$ bzw. $(x-1)^2 \cdot ((x+1)^2 + 2) > 0$. Das ist selbstverständlich erfüllt, da die erste Klammer durch Quadrieren sicher positiv ist und der zweite Ausdruck mindestens 2 ist.
3. Lösung: Arithmetisch-Geometrische Mittelungleichung für vier Variablen:

$$\frac{a^4 + b^4 + b^4 + b^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^4 b^{12}} = ab^3$$

Gleichheit würde nur für $a^4 = b^4$ gelten, und da a und b positiv sind, ist das gleichbedeutend mit $a = b$. Da dieser Fall nicht angenommen werden kann, ist das AM größer als das GM.

Aufgabe 3.

o.B.d.A. kann man annehmen, dass $a \geq b \geq c > 0$ gilt.
Dreiecksungleichung: $c^n + b^n > a^n$

$$c^n > a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \ \ldots \ + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

und da $<\geq b \geq c$ weiter

$$(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ \ldots \ + ab^{n-2} + b^{n-1}) \geq n \cdot b^{n-1} \geq n \cdot c^{n-1}$$

Also gesamt:

$$c^n \geq (a-b) \cdot n \cdot c^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad c \geq (a-b) \cdot n$$

Da $a - b$ eine feste, nicht negative Zahl ist, kann diese Ungleichung nicht für alle n gelten, da die rechte Seite beliebig groß wird, wenn n wächst. Es gibt also jedenfalls einen Wert n, sodass der Wert c vom Ausdruck $(a-b) \cdot n$ übertroffen wird, wenn $a - b > 0$ wäre. Somit muss $a - b = 0$ und $a = b$ gelten. Es handelt sich demnach um ein gleichschenkeliges Dreieck.

Aufgabe 4.

$A^n - B^n = (A-B) \cdot (A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1})$
Es gilt

$$n \cdot B^{n-1} < A^n - B^n = (A-B) \cdot (A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}) < n \cdot A^{n-1}$$

da jeder der Summanden in der rechten Klammer größer ist als die entsprechende Potenz von B und kleiner ist als die entsprechende Potenz von A. In mathematischeren“ Worten: $B^{n-1} < A^i B^{n-i-1} < A^{n-1}$ für jedes $0 \leq i \leq n-1$.

Aufgabe 5.

Betrachte die quadratischen Reste bei Division durch 3.

k	k^2
0	0
1	1
2	1

Die linke Seite ist also entweder $\equiv 0 \pmod 3$ oder $\equiv 1 \pmod 3$.
Ist $n = 0$, so gilt $k^2 = \sqrt{21609} = 147$.
Sei nun $n \geq 1$: Dann gilt $21608 + 6^n \equiv 2 + 0 \equiv 2 \pmod 2$, also kann die rechte Seite nicht gleich der linken Seite sein.

Aufgabe 6.

Die Signumfunktion ist definiert als

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Für $x > 1$ gilt: $x + |x| + [x] + \operatorname{sgn}(x) > 1 + 1 + 1 + 1 = 4 > 2$ also keine Lösung.
Für $x < 0$ gilt: $x + |x| = 0$ und somit $[x] + \operatorname{sgn}(x) \leq -1 + (-1) = -2 \neq 2$.
Für $0 < x < 1$ gilt: $[x] = 0, x = |x|$ und $\operatorname{sgn}(x) = 1$, also: $x + |x| + [x] + \operatorname{sgn}(x) = 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
Somit ist $x = \frac{1}{2}$ die einzoge Lösung der Gleichung.

Aufgabe 7.

Es gilt $a > b$, da sonst die rechte Seite der Gleichung nicht positiv wäre.
Wir verwenden die Zerlegung von $a^3 + b^3$ und die Nebenbedingung:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(\underbrace{a^2 - ab + b^2}_{K}) = a - b$$

Da $a + b > a - b$ gilt, muss $K < 1$ sein.
Die Zerlegung der Differenz zweier dritter Potenzen ist:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

und somit gilt

$$a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} < 1$$

Subtraktion von ab liefert die gewünschte Ungleichung, denn

$$a^2 + b^2 < 1 - ab < 1$$

Aufgabe 8.

Einsetzen der Formel für die geometrische Reihe:

$$1 - x + x^2 - + \ldots - x^{99} + x^{100} = \frac{1 - (-x)^{101}}{1 - (-x)}$$

und

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{99} + x^{100} = \frac{1 - x^{101}}{1 - x}$$

Multiplikation ergibt

$$\frac{1 - (-x)^{101}}{1 - (-x)} \cdot \frac{1 - x^{101}}{1 - x} = \frac{1 - x^{202}}{1 - x^2}$$

Mit $x^2 := t$ ergibt sich

$$\frac{1 - t^{101}}{1 - t} = 1 + t + \ldots + t^{100} = 1 + x^2 + x^4 + + \ldots + x^{200}$$

Aufgabe 9.

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{(n+k)!}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ \ldots\ +\frac{1}{(n+2)\ \cdots\ (n+k)}\right)$$

Wir verwenden, dass $\frac{1}{(n+2)(n+3)}<\frac{1}{(n+2)^2}$, $\quad \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}<\frac{1}{(n+2)^3}$ usw.
Somit können wir abschätzen:

$$1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ \ldots\ +\frac{1}{(n+2)\ \cdots\ (n+k)}<1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ \ldots\ +\frac{1}{(n+2)^{k-1}}$$

Für $0<q<1$ gilt: $1+q+q^2+\ \ldots\ +q^{k-1}<\frac{1}{1-q}$
Wir wählen $q=\frac{1}{n+2}$ und erhalten

$$\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ \ldots\ +\frac{1}{(n+2)^{k-1}}\right)<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}$$

Damit ist die Ungleichung gezeigt.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

aus [2, S. 168], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [2, S. 107], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team.
*H*inweis. Im Buch liegt hier ein Übersetzungsfehler vor, das Dreieck muss nicht gleichseitig sein. Das lässt sich leicht am Beispiel $a = b = 2$ und $c = 1$ sehen. Für jedes zulässige n erfüllt das Tripel $(2^n, 2^n, 1)$ die Dreiecksungleichung.

Aufgabe 4.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

aus [1], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 7.

aus [2, S. 108], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

aus [2, S. 111], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 9.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger)*. ikon VerlagsGesmbH, 2012.

[2] Jiri Herman, Radan Kučera, Radan Kucera, Jaromír Šimša, and Jaromir Simsa. *Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2000.