51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Oberstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 24. April 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 21. April 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 24. April 2020 von 15:30–17:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns,wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen a und b die Ungleichung

$$a^3 + b^3 + a + b \geq 4ab$$

gilt. Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 2. Es seien x und y positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{1}{x + xy} + \frac{1}{y + xy} \geq \frac{4}{x + 2xy + y}.$$

Aufgabe 3. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$:

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

Aufgabe 4. Man zeige für alle positiven x und y:

$$\frac{(x + y)^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

Aufgabe 5. Beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b mit $a^2 + b^2 \neq 0$ folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{a + b}{a^2 - ab + b^2} \leq \frac{4}{|a + b|}$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 6. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Beweise

$$(a + c)(b + 1) \leq 4$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 7. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Man beweise, dass die Ungleichung

$$(a + 2)(b + 2) \geq cd$$

gilt und gebe vier Zahlen a, b, c und d an, für die Gleichheit eintritt.

Aufgabe 8. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es sei t die Tangente an den Umkreis im Punkt B. Die Fußpunkte der Höhen auf die Seiten BC bzw. AB seien D und E.
Beweise: Die Tangente t ist zur Verbindungsgeraden der Punkte D und E parallel.

Aufgabe 9. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC mit den Umkreismittelpunkt O. P sei ein beliebiger Punkt auf AB und D bzw. E seien die Fußpunkte der Lote von P auf BC bzw. AC.
Beweise, dass OP die Strecke DE halbiert.

Aufgabe 10. Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis k, AB ist kein Durchmesser. C ist der Schnittpunkt der Tangenten in A bzw. B.
Zeige, dass der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC auf k liegt.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Viele Möglichkeiten:

- Mittelungleichungen
- $a^3 + b^3 + a + b = a(a^2 + 1) + b(b^2 + 1) \geq \dots.$
- $a^3 + b^3 + a + b = a^2 \left(a + \frac{1}{a}\right) + b^2 \left(b + \frac{1}{b}\right) \geq \dots$

Aufgabe 2. „Ausmultiplizieren“ oder Mittelungleichungen

Aufgabe 3. Beachte: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + bc + ca)$

Aufgabe 4: Verwende die AM- GM Ungleichung $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ und verschärfe die Ungleichung indem du $2\sqrt{xy}$ statt $x + y$ einsetzt.

Aufgabe 5: Unterscheide zwei Fälle: $a + b > 0$ und $a + b < 0$.

Aufgabe 6: Verwende zunächst die GM- AM Ungleichung: $(a + c)(b + 1) \leq \frac{(a+b+c+1)^2}{4}$

Aufgabe 7: Man multipliziert auf der linken Seite aus und ersetzt dann die 4 durch $a^2+b^2+c^2+d^2$. Dann kann man Quadrate bilden.

Aufgabe 8: Der Winkel von t zur Seite AB ist $\gamma = \angle ACB$ (Peripheriewinkelsatz).
Bleibt nur zu zeigen, dass der Winkel $\angle BED$ ebenfalls γ ist.

Aufgabe 9: Die Schnittpunkte von AO und BO mit PE und PD seien X und Y. Das Viereck $PYOX$ ist ein Parallelogramm.

Aufgabe 10: Sei M der Mittelpunkt des Kreises k. Der Schnittpunkt von CM mit k sei I. Das Dreieck ACB ist gleichschenkelig. Es genügt zu zeigen, dass AI den Winkel $\angle BAC$ halbiert.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

- Man kann die Aufgabe mit der arithmetisch- geometrischen Mittelungleichung lösen:

$$\frac{a^3+b^3+a+b}{4} \geq \sqrt[4]{a^4b^4} = ab.$$

- Es gilt $a^2+1 \geq 2a$ und analog $b^2+1 \geq 2b$. Daher gilt

$$a^3+b^3+a+b = a(a^2+1)+b(b^2+1) \geq 2a^2+2b^2$$

und mit

$$2a^2+2b^2 \geq 4ab \iff (a-b)^2$$

ist alles gezeigt.

Aufgabe 2.

Multipliziert man die Ungleichung mit dem gemeinsamen Nenner $(x+xy)(y+xy)(x+2xy+y) > 0$, so vereinfacht sich die Ungleichung zu

$$(x-y)^2 \geq 0.$$

Aufgabe 3.

Es gilt: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ und daraus folgt $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 0$. Mit der Bedingung $a^2+b^2+c^2 = 1$ folgt daraus

$$-\frac{1}{2} \leq ab+bc+ca.$$

Die zweite Ungleichung folgt sofort aus $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 = 1$.

Aufgabe 4.

Wir verwenden die arithmetisch- geometrische Ungleichung $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ und verschärfe die Ungleichung indem wir $2\sqrt{xy}$ einsetzen.

$$\frac{(2\sqrt{xy})^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

Das ist äquivalent zu

$$xy - 4\sqrt{xy} + 4 \geq 0$$

also zu

$$(\sqrt{xy}-2)^2 \geq 0.$$

Gleichheit gilt für $x = y = 2$.

Aufgabe 5.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $a + b < 0$

  Da $a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4}$ für alle reellen Zahlen positiv ist, ist die linke Seite der Gleichung negativ und die rechte positiv und die Ungleichung bewiesen.

- $a + b > 0$

  Wir können die Betragsstriche weglassen und mit dem gemeinsamen Nenner $(a^2 - ab + b^2)(a + b) > 0$ multiplizieren.

  Wir erhalten

  $$a^2 + 2ab + b^2 \leq 4a^2 - 4ab + 4b^2.$$

  Das ist aber äquivalent zu

  $$0 \leq (a - b)^2.$$

Gleichheit gilt für $a = b > 0$.

Aufgabe 6.

Mit der geometrisch-arithmetischen Mittelungleichung folgt

$$(a + c)(b + 1) \leq \frac{(a + b + c + 1)^2}{4}.$$

Weiters gilt mit der arithmetisch- quadratischen Mittelungleichung

$$\frac{a + b + c + 1}{4} \leq \sqrt[4]{\frac{a^2 + b^2 +{}^2 +1}{4}} = 1,$$

also

$$a + b + c + d \leq 4.$$

Zusammen mit der oberen Ungleichung folgt die Behauptung.
Gleichheit gilt für $a = b = c = 1$.

Aufgabe 7.

Multipliziert auf der linken Seite aus und ersetzt dann die 4 durch $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ so erhält man

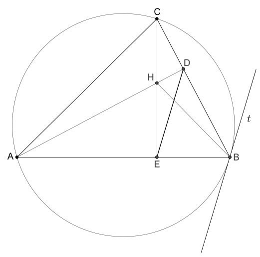
$$ab + 2a + 2b + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq cd.$$

Folgende Ungleichungen sind nun äquivalent:

$$\begin{aligned} 2ab + 4a + 4b + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2cd &\geq 0 \\ (a + b + 2)^2 - 4 + (c - d)^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &\geq 0 \\ (a + b + 2)^2 + (c - d)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt für $a+b=-2$, $c=d$ und $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, also etwa für das Quadrupel $(-1,-1,1,1)$.

Aufgabe 8.

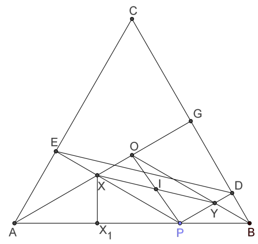


Der Winkel von t zur Seite AB ist $\gamma = \angle ACB$ (Peripheriewinkelsatz: Der Sehnen-Tangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel).
Es sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Das Viereck $EBDH$ ist ein Sehnenviereck. Daher gilt

$$\angle BED = \angle BHD = \gamma.$$

Damit schließen aber DE und t denselben Winkel mit der Seite AB ein, d.h. sie sind parallel.

Aufgabe 9.



Die Schnittpunkte von AO und BO mit PE und PD seien X und Y. Das Viereck $PYOX$ ist ein Parallelogramm, da gegenüberliegende Seiten parallel sind. Daher halbiert PO die Strecke XY.
Sei nun X_1 der Lotfußpunkt des Lotes von X auf AB.
Die drei Dreiecke PX_1X, AX_1Xund AEX sind kongruent. Weiters gilt $EX = \frac{1}{2}AX = \frac{1}{2}PX$.

Also gilt

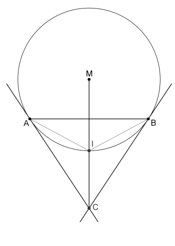
$$PX : XE = 2 : 1.$$

Analog zeigt man

$$PY : YD = 2 : 1.$$

Daher ist ED parallel zu XY und mit dem Strahlensatz folgt die Behauptung.

Aufgabe 10.



Sei M der Mittelpunkt des Kreises k. Der Schnittpunkt von CM mit k sei I. Da das Dreieck ACB gleichschenkelig ist, genügt es zu zeigen, dass AI den Winkel $\angle BAC$ halbiert. Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle CAI = \angle ABI$$

und aus Symmetriegründen gilt

$$\angle ABI = \angle IAB.$$

Daher halbiert AI den Winkel $\angle BAC$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 2.

[1], von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

[2], JRW 1995 (Gerd Baron), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

[3], JRW 2008 (Karl Czakler), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

aus Art of Problem-Solving, übersetzt von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

[4], RWF 2016 (Walther Janous), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 9.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 10.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger).* ikon VerlagsGesmbH, 2012.

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 1990-1999: Aufgaben und Lösungen.* öbv, 1999.

[3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000-2008: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2018. Auflage 1.3.

[4] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2019.