51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Oberstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de" – Aufgabenblatt für den 15. Mai 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 12. Mai 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 15. Mai 2020 von 15:30–17:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns,wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Für die positiven reellen Zahlen x und y gilt die Bedingung $xy = 4$. Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \le \frac{2}{5}$$

gilt. Für welche x, y tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 2. Löse folgende Ungleichung in der Menge der reellen Zahlen:

$$\frac{|x^2-4|}{x+2} \ge x$$

Aufgabe 3. Bestimme alle positive ganzen Zahlen für die gilt:

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} = \sqrt{ab-1}$$

Aufgabe 4. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a < b < c < d$.
Man ordne $x = a \cdot b + c \cdot d$, $y = b \cdot c + a \cdot d$ und $z = c \cdot a + b \cdot d$ der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge.

Aufgabe 5. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten C und D. Weiters sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Man beweise, dass die Strecken PA und PD gleich lang sind.

Aufgabe 6. Der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$ wird an C gespiegelt. Dadurch erhält man den Punkt E. Der Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks BDE mit der Strecke AM wird mit S bezeichnet.
Man zeige, dass S die Strecke AM halbiert.

Aufgabe 7. Es sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$ und dem Umkreismittelpunkt U. Die Tangenten an den Umkreis in den Punkten A und B schneiden einander im Punkt T. Die Symmetrale der Seite BC schneidet die Seite AC im Punkt S.
Man zeige:

a) Die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.

b) Die Gerade ST ist parallel zur Seite BC.

Aufgabe 8. Es sei ABCD ein Rechteck mit $AB \neq BC$ und dem Mittelpunkt O. Die Normale durch O zu BD schneidet die Gerade AB in E und die Gerade BC in F. Der Mittelpunkt der Strecke CD sei M, der Mittelpunkt der Strecke AD sei N.
Beweise: FM steht normal zu EN.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Auf den gemeinsamen Nenner $5(x+3)(y+3)$ bringen.

Aufgabe 2. Fallunterscheidungen: $|x| > 2$ und $|x| < 2$.

Aufgabe 3. Den Term $ab - a - b + 1$ kann man als Produkt $(a-1)(b-1)$ anschreiben (Rechteckszerlegung).

Aufgabe 4: Zeige: $x > z > y$.

Aufgabe 5: Versuche möglichst viele Winkel auszurechnen (Winkeljagd) und verwende, dass ein Dreieck genau dann gleichschenkelig ist, wenn die Basiswinkel gleich groß sind.

Aufgabe 6: Diese Aufgabe kann man lösen, wenn man einen Satz aus der Satzgruppe des Pythagoras verwendet. (Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz)

Aufgabe 7: Bei dieser Aufgabe spielt der Peripheriewinkelsatz eine wichtige Rolle. Zeige zunächst, dass die Punkte A, B, T und U auf einem Kreis liegen. Dann zeige, dass die Punkte A, S, U und B auf demselben Kreis liegen.
Den zweiten Teil der Aufgabe kann man mit dem Südpolsatz zeigen.

Aufgabe 8: Diese Aufgabe ist nicht einfach. Man muss zeigen, dass das Dreieck ANE ähnlich zum Dreieck CMF ist.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir multiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner $5(x+3)(x+5) > 0$ und erhalten

$$5(y+3+x+3) \leq 2xy+6y+6+18$$

Das ist unter Verwendung von $xy = 4$ zu

$$4 \leq x+y$$

äquivalent. Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt

$$2 = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

und daraus ergibt sich sofort die Richtigkeit der letzten Ungleichung.

Aufgabe 2.

Es gilt $x \neq -2$ und $x = 2$ ist keine Lösung der Ungleichung. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

- $|x| > 2$:
  In diesem Fall können wir die Betragsstriche weglassen und erhalten
  $$\frac{x^2-4}{x+2} \geq x.$$
  Das ist zu
  $$x-2 \geq x$$
  äquivalent und daher gibt es in diesem Fall keine Lösungen.
- $|x| < 2$:
  In diesem Fall lautet die Ungleichung
  $$\frac{4-x^2}{x+2} \geq x.$$
  Das ist zu
  $$2-x \geq x$$
  äquivalent und es folgt $1 \geq x$. Daher sind alle reellen Zahlen mit $-2 < x \leq 1$ Lösungen dieser Ungleichung.

Aufgabe 3.

Es gilt $a > 1$ und $b > 1$. Wir quadrieren die Gleichung und erhalten

$$a-1+2\sqrt{a-1}\sqrt{b-1}+b-1 = ab-1$$

also

$$2\sqrt{a-1}\sqrt{b-1} = ab - a - b + 1.$$

Den Term $ab - a - b + 1$ kann man als Produkt $(a - 1)(b - 1)$ anschreiben (Rechteckszerlegung). Damit ist die obige Gleichung zu

$$4(a-1)(b-1) = (a-1)^2(b-1)^2$$

äquivalent. Für $a = 1$ oder $b = 1$ erhalten wir die Lösungspaare $(1, k)$ und $(k, 1)$ mit k ganzzahlig und $k \geq 1$. Für $a \neq 1$ und $b \neq 1$ können wir durch $(a - 1)(b - 1)$ kürzen und es ergibt sich

$$4 = (a-1)(b-1).$$

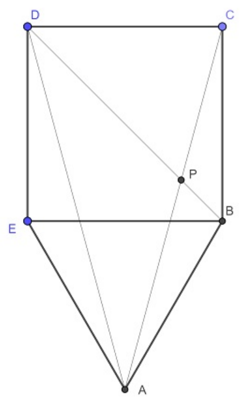
Die Zahl 4 lässt sich als Produkt von zwei positiven ganzen Zahlen nur in der Form $4 = 1 \cdot 4$ und $4 = 2 \cdot 2$ darstellen. Damit ergeben sich folgende weitere positiven ganzzahligen Lösungspaare (2, 5), (5, 2) und (3, 3).

Aufgabe 4.

Behauptung: $x > z > y$.
Wir zeigen $x > z$:
Es gilt $ab+cd > ca+bd \iff a(b-c) > d(b-c) \iff a < d$ und das ist nach Voraussetzung richtig. (Beim letzten Schritt haben wir durch $(b - c) < 0$ dividiert und daher das Ungleichheitszeichen umgedreht.)
Wir zeigen $z > y$:
Es gilt $ca + bd > bc + ad \iff c(a - b) > d(a - b) \iff c < d$ und auch diese Ungleichung ist laut Voraussetzung richtig.

Aufgabe 5.

Wegen $BC = CD = DE$ und $B \perp CD$, $CD \perp DE$ ist $BCDE$ ein Quadrat, also stimmt auch die Länge der Strecke BE mit der Seitenlänge des Fünfecks $ABCDE$ überein, und es gilt $BC \perp BE$, $BE \perp DE$. Weiters ist das Dreieck ABE wegen $AB = AE = BE$ ein gleichseitiges Dreieck.



Daraus folgt

$$\angle CBA = \angle CBE + \angle EBA = 90° + 60° = 150°$$

$$\angle AED = \angle AEB + \angle BED = 60° + 90° = 150°.$$

Wegen $AB = BC = DE = EA$ sind ABC und AED somit kongruente gleichschenkelige Dreiecke, und wir erhalten

$$\angle BAC = \angle ACB = \angle DAE = \angle EDA = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

Weil jede Quadratdiagonale die rechten Winkel in ihren Endpunkten halbiert, ergibt sich damit

$$\angle ADP = \angle EDB - \angle EDA = 45° - 15° = 30°.$$

Weiters gilt

$$\angle PAD = \angle BAE - \angle BAC - \angle DAE = 60^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$$

Daher ist ADP ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basis AD, und es folgt $PA = PD$.

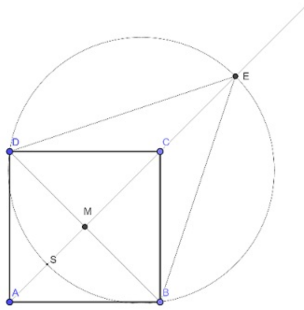
Aufgabe 6.

Das Dreieck SBE ist rechtwinkelig mit dem rechten Winkel im Eckpunk B.

Die Strecke MB ist die Höhe auf die Hypotenuse SE dieses Dreiecks. Daher gilt mit dem Höhensatz

$$SM \cdot ME = MB^2$$

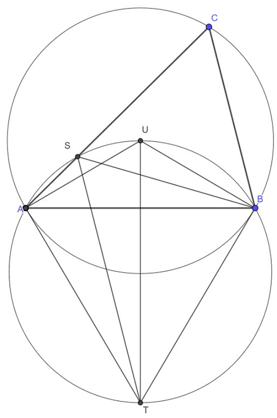
und mit $ME = 2 \cdot MB$ folgt $SM = \frac{MB}{2} = \frac{AM}{2}$.



Aufgabe 7.

a) Da AT und BT normal auf AU bzw. BU stehen, liegen die Punkte A, B, T und U aufgrund des Satzes von Thales auf einem Kreis k_1 über dem Durchmesser TU.

Weiters gilt mit dem Peripheriewinkelsatz $\angle AUB = 2\gamma$. Da das Dreieck BSC gleichschenkelig ist, gilt $\angle BCS = \angle CBS = \gamma$. Da der Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel ist, folgt $\angle ASB = 2\gamma$. Daher gilt $\angle ASB = \angle AUB = 2\gamma$, und mit dem Peripheriewinkelsatz folgt, dass die Punkte A, B, S und U auf einem Kreis k_2 liegen. Da die beiden Kreise k_1 und k_2 die Punkte A, B, U gemeinsam haben gilt $k_1 = k_2$ und die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.



b) Mit dem Südpolsatz folgt, dass ST die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ASB$ ist. Daher gilt $\angle AST = \gamma$ und somit ist ST parallel zu BC.

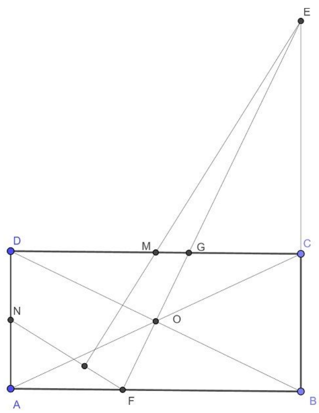
Aufgabe 8.

Wir zeigen, dass die Dreiecke AEN und CFM ähnlich sind.

Die beiden Dreiecke haben einen rechten Winkel gemeinsam. Es genügt daher

$$\begin{aligned} AE : AN = FC : MC &\iff MC : AN = FC : AE \\ &\iff AB : BC = FC : AE \end{aligned}$$

zu zeigen.



Bezeichnet man den Schnittpunkt von EF mit CD mit G, dann gilt aus Symmetriegründen $AE = CG$. Die beiden rechtwinkeligen Dreiecke CFG und CDB sind ähnlich, da $\angle BFO = \angle CDB$ gleich große Normalwinkel sind. Daher gilt

$$FC : GC = DC : BC \quad \text{also} \quad FC : AE = AB : BC$$

und daher sind die beiden Dreiecke ähnlich.

Daher sind $\angle ANE$ und $\angle CMF$ gleich groß und da $AN \perp CM$, folgt $EN \perp FM$ (gleich große Normalwinkel).

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

[1] (Walther Janous), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

[1] (Richard Henner), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

[2] (Gottfried Perz), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

[4], JRW 2009 (Walther Janous), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 7.

[3] (Karl Czakler), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Junior-Regionalwettbewerb 2015. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/102`. (aufgerufen am 18.05.2020).

[2] Junior-Regionalwettbewerb 2016. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/204`. (aufgerufen am 18.05.2020).

[3] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2016. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/149`. (aufgerufen am 18.05.2020).

[4] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.