# 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Oberstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 22. Mai 2020

## Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 19. Mai 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 22. Mai 2020 von 15:30–17:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

## Aufgaben

**Aufgabe 1.** Jure baut Wassermelonen und Honigmelonen an. Für jede Wassermelone die er verkauft, bekommt er 8 Euro und für jede Honigmelone 6 Euro. Um neuen Draht für seine Gartenzäune zu kaufen, muss er ein Viertel der Wassermelonen und die Hälfte der Honigmelonen verkaufen. Er würde den gleichen Betrag verdienen, wenn er ein Zwölftel der Wassermelonen und drei Viertel der Honigmelonen verkaufen würde. Wie viele Wassermelonen und Honigmelonen hat Jure in seinem Garten, wenn der Gesamtwert der Wassermelonen um 192 Euro höher ist als der Gesamtwert der Honigmelonen?

**Aufgabe 2.** Ante und Branko erhalten 2415 Euro und beschließen, das Geld mit Hilfe zweier Würfel aufzuteilen. Wenn die Würfel die gleichen Zahlen zeigen, teilen Ante und Branko das Geld im Verhältnis $2 : 1$ auf und wenn sie nicht die gleichen Zahlen zeigen, teilen sie das Geld im Verhältnis $2 : 3$ auf. Welches Ereignis ist wahrscheinlicher: dass Ante mehr als 1000 Euro bekommt oder dass Branko weniger als 1000 Euro bekommt?
Bestimme diese Wahrscheinlichkeiten.

**Aufgabe 3.** Es gibt 12 Jungen und 13 Mädchen im Tennisclub. Unter den Mädchen sind drei Schwestern. Ein Paar wird zufällig ausgewählt, um gegeneinander zu spielen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schwestern ausgewählt werden?

**Aufgabe 4.** Ein Vater gibt seinen Söhnen 160000 Euro und möchte, dass sie das Geld in gleiche Teile aufteilen. Aber einer seiner Söhnen verzichtet auf seinen Anteil, weshalb die Teile der anderen um 8000 Euro vergrößert werden.
Wie viele Söhne hat der Vater?

**Aufgabe 5.** Vera wurde beauftragt, Karten zu gestalten. Am ersten Tag erledigte sie 10 Prozent der Bestellung. Am zweiten Tag machte sie 25 Prozent des Restes und am dritten Tag 40 Prozent des neuen Restes. Danach hatte sie noch 81 Karten zu gestalten.
Wie viele Karten wurden bestellt?

**Aufgabe 6.** Für das Streichen der Wände im neuen Gebäude hätten 10 Arbeiter 15 Tage benötigt. Am Anfang gab es jedoch nur 6 Arbeiter, und nach 5 Tagen kamen zwei weitere Arbeiter und nach weiteren 3 Tagen 4 Arbeiter hinzu.
Nach wie vielen Tagen war der Auftrag fertig gestellt?

# Tipps zu ausgewählten Aufgaben

**Aufgabe 1.** Schreibe die Aufgabe als ein Gleichungssystem auf.

**Aufgabe 2:** Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich

**Aufgabe 3:** Wie viele verschiedene Paare von Schwerstern gibt es?

**Aufgabe 4:** Wandle die Aufgabe in ein Gleichungssystem um.

**Aufgabe 5:** Berechne für jeden Tag den Anteil der Karten, der übrig geblieben ist.

**Aufgabe 6:** Wie schnell arbeitet ein Mann?

# Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

**Aufgabe 1.**

Sei $x$ die Anzahl der Wassermelonen und $y$ die Anzahl der Honigmelonen, die Jure hat. Wenn er ein Viertel der Wassermelonen und die Hälfte der Honigmelonen verkaufen würde, würde er $\frac{x}{4} \cdot 8 + \frac{y}{2} \cdot 6$ Euro bekommen. Wenn er ein Zwölftel der Wassermelonen und drei Viertel der Honigmelonen verkauften wrde, würde er $\frac{x}{12} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot y \cdot 6$ Euro bekommen. Nach der Voraussetzung gilt

$$\frac{x}{4} \cdot 8 + \frac{y}{2} \cdot 6 = \frac{x}{12} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot y \cdot 6$$

und

$$8x - 6y = 192.$$

Nach der Multiplikation der ersten Gleichung mit 6 erhalten wir

$$12x + 18y = 4x + 27y \implies 8x - 9y = 0.$$

Wir lösen das System

$$8x - 9y = 0 \tag{1}$$
$$8x - 6y = 192 \tag{2}$$

und erhalten

$$x = 72, \quad y = 64.$$

Jure hat 72 Wassermelonen und 64 Honigmelonen im Garten.

**Aufgabe 2.**

Falls die Würfel die gleichen Zahlen zeigen, dann teilen Ante und Branko das Geld im Verhältnis $2 : 1$. Da $2415 : 3 = 805$, bekommt Ante $2 \cdot 805 = 1610$ Euro und Branko 805 Euro. Wenn die Zahlen auf den Würfeln verschieden sind, dann teilen sie das Geld im Verhältnis $2 : 3$. Da $2415 : 5 = 483$ bekommt Ante $2 \cdot 483 = 966$ Euro und Branko $3 \cdot 483 = 1449$ Euro. Beide Ereignisse (dass Ante mehr als 1000 Euro bekommt und dass Branko weniger als 1000 Euro bekommt) treten genau dann ein, wenn die Würfel die gleichen Zahlen zeigen. Daher sind beide Ereignisse gleich wahrscheinlich. Wir können die Ereignisse als Paare von Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, also als $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 5), (6, 6)\}$ darstellen. Die gesamte Anzahl an Möglichkeiten ist gleich $6 \cdot 6 = 36$.
Die Anzahl der gesuchten Ereignisse kann man als Menge $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ darstellen. Die Anzahl dieser Ereignisse ist 6. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{6}{36}$.

**Aufgabe 3.**

Es gibt insgesamt 25 Kinder im Klub, daher gibt es $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ Möglichkeiten, 2 Spieler auszuwählen. Und es gibt genau 3 Paare von zwei Schwestern. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{300}$.

**Aufgabe 4.**

Sei $n$ die Anzahl der Söhne und $x$ der Geldbetrag, den jeder von ihnen bekommen sollte. Dann gilt $n \cdot x = 160000$. Da einer von ihnen auf seinen Teil verzichtet, wird das Geld unter $n-1$ Söhnen verteilt, und jeder von ihnen bekommt $x+8000$. Deswegen gilt $(n-1)\cdot(x+8000) = 160000$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&(n-1)\cdot(x+8000) = n\cdot x\\
&nx + 8000n - x - 8000 = nx\\
&x = 8000n - 8000.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung folgt

$$\begin{aligned}
&n\cdot(8000n - 8000) = 160000\\
&8000n^2 - 8000n - 160000 = 0\\
&n^2 - n - 20 = 0\\
&n^2 – 5n + 4n – 20 = 0\\
&n\cdot(n-5) + 4\cdot(n-5) = 0\\
&(n-5)\cdot(n+4) = 0.
\end{aligned}$$

Da $n$ nicht negativ sein kann, gilt $n = 5$.

**Aufgabe 5.**

Sei $x$ die Anzahl der bestellten Karten. Am ersten Tag hat sie $0,1\cdot x$ gestaltet, und $0,9\cdot x$ sind übrig geblieben.
Am zweiten Tag gestaltete sie $0,25\cdot 0,9\cdot x = 0,225\cdot x$, und $0,675\cdot x$ sind übrig geblieben.
Am dritten Tag gestaltete sie $0.4\cdot 0.675\cdot x = 0,27\cdot x$, und $0,405\cdot x$ sind übrig geblieben.
Deshalb gilt $0,405\cdot x = 81$, d.h. $x = \frac{81}{0.405} = 200$. Also wurden 200 Karten bestellt.
**Aufgabe 6.**

Wenn 10 Arbeiter den ganzen Auftrag in 15 Tagen fertigstellen würden, dann würde ein Mann $10\cdot 15 = 150$ Tage dafür brauchen. Das heißt, dass ein Mann $\frac{1}{150}$ des Auftrags an einem Tag schaffen würde. 6 Arbeiter machen dann $\frac{6}{150}$ des Auftrags an einem Tag. Ähnlich sehen wir, dass 8 Arbeiter $\frac{24}{150}$ des Auftrags in 3 Tagen fertigstellen würden. 12 Arbeiter haben $x$ Tage gearbeitet und $1 - \frac{30}{150} - \frac{24}{150} = \frac{96}{150}$ des Auftrags fertiggestellt. Daher ist $120\cdot x = 96$, und $x = 8$. Nun ist der ganze Auftrag in $5+3+x = 16$ Tagen fertiggestellt.

# Quellenangaben zu den Aufgaben

**Aufgabe 1.**

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

**Aufgabe 2.**

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

**Aufgabe 3.**

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

**Aufgabe 4.**

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

**Aufgabe 5.**

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

**Aufgabe 6.**

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

## Literatur


[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`. (aufgerufen am 20.05.2020).