51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Oberstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 29. Mai 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Jakob Steininger zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 26. Mai 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Jako Steininger bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 29. Mai 2020 von 15:30–17:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Seien $d_1 < d_2 < ... < d_r$ alle Teiler von n. Zeige, dass die Gleichung

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = n$$

keine Lösung besitzt.

Aufgabe 2. Seien $d_1 < d_2 < ... < d_r$ alle Teiler von n, die kleiner sind als n. Finde alle n mit

$$\mathrm{kgV}(d_1, d_2, ..., d_r) \neq n.$$

Aufgabe 3. Finde ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, welches $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ als Nullstelle besitzt. Schließe mit Hilfe dieses Polynoms darauf, dass die Zahl $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ keine rationale Zahl ist.

Aufgabe 4. Sei n keine Quadratzahl und $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von n (etwa $\tau(20) = 6$). Zeige, dass das Produkt aller Teiler von n gleich $n^{\tau(n)/2}$ ist.

Aufgabe 5. Finde alle $n \in \mathbb{N}$, sodass

a) $n^2 + 8$ eine Quadratzahl ist,

a) $n^2 - 3n + 11$ eine Quadratzahl ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Betrachte modulo 3.

Aufgabe 2: Experimentiere mit kleinen Zahlen, etwa $n \leq 20$, und stelle eine Vermutung auf.

Aufgabe 3: Sei $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, dann gilt $x^2 = 2 + 3 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$. $(x^2 - 5)^2 = ...$.

Aufgabe 4: Analysiere das Produkt aller Teiler von n für z.B. $n = 20$ und verstehe, warum $20^3 = 20^{\tau(20)/2}$ das Ergebnis ist.

Aufgabe 5: Finde zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen, die den Ausdruck "einsperren".

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Zunächst gilt $d_1 = 1$, also $1 + d_2^2 + d_3^2 = n$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: $3 \mid n$. Deshalb ist entweder d_2 oder d_3 gleich 3. Falls $d_3 = 3$ bleibt nur $d_2 = 2$ und damit

$$n = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

ein Widerspruch zu $3|n$. Deshalb gilt $d_2 = 3$ und modulo 3

$$1 + 3^2 + d_3^2 \equiv n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow d_2^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

Dies hat jedoch keine Lösungen, da die quadratischen Reste modulo 3 nur 0 und 1 sind.

Fall 2: $3 \nmid n$. Nun sind d_2 und d_3 beide nicht durch 3 teilbar. Für nicht durch 3 teilbare Zahlen x gilt

$$x \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 3$$
$$x \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3.$$

Somit gilt $n \equiv 1 + d_2^2 + d_3^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$, also $3 \mid n$, ein Widerspruch.

Aufgabe 2.

Zunächst, wenn n nur einen Primfaktor hat, also $n = p^a$, hat n die Teiler $1, p, p^2, \ldots, p^{a-1}$ die kleiner sind als n selbst. Deren kleinstes gemeinsames Vielfaches ist p^{a-1}, somit ist $n = p^a$ eine Lösung für jede Primzahl p und positive ganze Zahl a.
Sei nun n von der Gestalt $p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}$, wobei $p_1, \ldots, p_r$ Primzahlen sind und $a_1, \ldots, a_r$ positive natürliche Zahlen. Damit sind $p_1^{a_1}, \ldots, p_s^{a_s}$ Teiler von n (die kleiner sind als n selbst).
Nun gilt folgendes:

- $\mathrm{kgV}(d_1, \ldots, d_r) \mid n$, da $d_1, \ldots, d_r \mid n$.
- $\mathrm{kgV}(d_1, \ldots, d_r) \geq \mathrm{kgV}(p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}) = n$.

Aus diesen beiden Überlegungen folgt $\mathrm{kgV}(d_1, \ldots, d_r) = n$. Also sind nur die schon erwähnten Primzahlpotenzen Lösungen.

Aufgabe 3.

Sei $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, dann gilt $x^2 = 2 + 3 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$. Deshalb folgt

$$(x^2 - 5)^2 = (-2\sqrt{6})^2 = 4 \cdot 6 = 24,$$

womit $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ eine Nullstelle vom Polynom

$$(x^2 - 5)^2 - 24 = x^4 - 10x^2 + 25 - 24 = x^4 - 10x^2 + 1$$

ist.

Nun zur Frage, ob $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ eine rationale Zahl ist. Falls ja, lässt sie sich schreiben als $\frac{a}{b}$, wobei a und b ganze Zahlen sind, $b \neq 0$, die zueinander teilerfremd sind. Damit gilt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 - 10\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 = 0.$$

Multiplikation mit b^4 liefert

$$a^4 - 10a^2b^2 - b^4 = 0.$$

Falls $b \notin \{-1, 1\}$, sei p ein Primfaktor von b. Durch die Gleichung folgt nun $p \mid a^4 \Rightarrow p \mid a$, womit a und b nicht teilerfremd sind, ein Widerspruch.
Es bleibt also der Fall $b \in \{-1, 1\}$, wodurch x ganzzahlig wäre. Betrachtet man nun die ursprüngliche Gleichung $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ wo jetzt $x \in \mathbb{Z}$ gilt, erkennt man, dass x ein Teiler von 1 sein muss, da x jeden anderen Term teilt. Überprüft man nun die drei Fälle $x = -1$, $x = 0$ und $x = 1$ merkt man, dass keine von diesen eine Nullstelle ist.
Damit haben wir gezeigt, dass das Polynom $x^4 - 10x^2 + 1$ keine rationale Nullstelle besitzt und damit $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ irrational ist.

Aufgabe 4.

Zu jedem Teiler d von n gibt es den Komplementärteiler n/d. (Etwa ist 4 ein Teiler von 20, wobei 5 der Komplementärteiler ist). Deshalb tauchen Teiler immer in Paaren auf, deren Produkt die ursprüngliche Zahl ist. Nun kann man das Produkt der Teiler ebenfalls in Paare zusammenfassen, zum Beispiel gilt für $n = 20$

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 = \underbrace{1 \cdot 20}_{=20} \cdot \underbrace{2 \cdot 10}_{=20} \cdot \underbrace{4 \cdot 5}_{=20} = 20^3 = 20^{\tau(20)/2}.$$

Die Anzahl dieser Paare ist die Anzahl der Teiler $\tau(n)$ dividiert durch 2, da jedes Paar aus 2 Teilern besteht.
Die einzigen Zahlen n, für diese Überlegung nicht stimmt, ist, wenn ein Teiler mit seinem Komplementärteiler übereinstimmt. Dies ist genau bei Quadratzahlen der Fall, da m^2 den Teiler m mit Komplementärteiler m besitzt.

Aufgabe 5.

a) Für $n \geq 4$ gilt

$$n^2 < n^2 + 8 < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Damit liegt $n^2 + 8$ zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen, ist also selber keine Quadratzahl. Die Fälle $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ probiert man einzeln und erhält die einzige Lösung $n = 1$.

b) Hier zeigt man für $n \geq 11$ die Ungleichung

$$(n - 2)^2 = n^2 - 4n + 4 < n^2 - 3n + 11 < n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2,$$

wodurch wieder keine Lösung möglich ist. Für $n \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ gibt es die drei Lösungen $n = 1$, $n = 2$ und $n = 10$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 2.

aus [1]

Literatur

[1] Schweizer Vorrunde 2018. https://imosuisse.ch/smo/pruefungen/smo2018/vorrunde/pruefung/vorrunde_2018_de.pdf. (aufgerufen am 30. Mai 2020).