51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Oberstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 05. Juni 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Karl Czakler zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 02. Juni 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Karl Czakler bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 05. Juni 2020 von 15:30–17:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns,wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

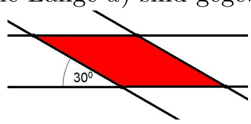
Aufgaben

Aufgabe 1. Beweise, dass die Differenz zweier natürlicher Zahlen, von denen die eine durch beliebiges Umstellen der Ziffern der andren entsteht, stets durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 2. Beweise, dass es keine ganzen Zahlen a, b, c gibt mit

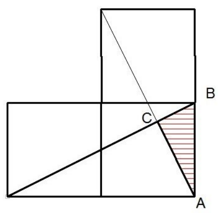
$$a^2 + b^2 - 4c = 3.$$

Aufgabe 3. Zwei Streifen der Breite a (d.h. ihr Normalabstand hat die Länge a) sind gegeben. Sie liegen, wie in der Figur dargestellt ist, in einem Winkel von 30° übereinander.
Wie groß ist die Fläche, die sie gemeinsam haben?



Aufgabe 4. Drei Quadrate mit der Seitenlänge a sind gegeben.

Sie sind, wie in der Figur dargestellt, aneinandergefügt.
Berechne den Flächeninhalt des eingezeichneten Dreiecks ABC.



Aufgabe 5. Auf wie viele Arten kann die Zahl 345 als Summe von aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen dargestellt werden?

Aufgabe 6. Bestimme die kleinste Zahl n, für die jede n-elementige Teilmenge von $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ zwei Zahlen enthält, deren Differenz 8 ist.

Aufgabe 7. Es seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck, M der Mittelpunkt der Seite AC und F auf AB der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C.
Man beweise, dass $AM = AF$ genau dann gilt, wenn $\angle BAC = 60°$.

Aufgabe 8. Zu jeder Seite eines Quadrats wird in roter Farbe eine positive ganze Zahl geschrieben. Zu jedem Eckpunkt wird mit grüner Farbe das Produkt der beiden roten Zahlen geschrieben, die bei den angrenzenden Seiten stehen. Die Summen der grünen Zahlen sei 40.
Welche Werte sind für die Summe der roten Zahlen möglich?

Aufgabe 9. Es seien a und b reelle Zahlen mit $0 \leq a,\, b \leq 1$.
Beweise:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Verwende die Teilbarkeitsregel durch 9. Wie lautet sie?

Aufgabe 2. Welche Reste lässt eine Quadratzahl bei der Division durch 4?

Aufgabe 3. Bei dieser Aufgabe kann man schön sein Wissen über gleichseitige Dreiecke verwenden.

Aufgabe 4: Versuche ähnliche Dreiecke zu finden und die Seitenlängen des gesuchten Dreiecks auszurechnen.

Aufgabe 5: Verwende die Summenformel

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

und die Primfaktorzerlegung von $345 = 3 \cdot 5 \cdot 23$.

Aufgabe 6: Konstruiere zunächst eine möglichst große Teilmenge die keine zwei Zahlen enthält, deren Differenz 8 ist.

Aufgabe 7: Die Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks und den Satz von Thales gilt es hier auszunützen. Achtung: Der Beweis ist in beiden Richtungen zu führen.

Aufgabe 8: Kann man den abstrakten Ausdruck für die Summe der grünen Zahlen faktorisieren? Verwende die Primfaktorzerlegung von 40.

Aufgabe 9: Verwende, dass für jede reelle Zahl t mit $0 \leq t \leq 1$ die Ungleichung

$$t^2 \leq t$$

gilt.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Eine natürliche Zahl lässt bei der Division durch 9 denselben Rest wie ihre Ziffernsumme. Da die Ziffernsummen der beiden Zahlen gleich sind, lassen auch die beiden Zahlen bei der Division durch 9 denselben Rest. Daraus folgt sofort, dass ihre Differenz durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 2.

Eine Quadratzahl lässt bei der Division durch 4 die Reste 0 oder 1. Daher gilt

$a^2 + b^2 - 4c \equiv 0 \mod (4)$ oder $a^2 + b^2 - 4c \equiv 1 \mod (4)$ oder $a^2 + b^2 - 4c \equiv 2 \mod (4)$.

Da die rechte Seite der Gleichung 3 ist, kann es keine ganzzahligen Lösungen geben.

Aufgabe 3.

Der Fußpunkt des Lotes von A auf BC sei F. Dann gilt $\angle BAF = 60°$, das Dreieck ABF also ein „halbes gleichseitiges Dreieck“ und daraus folgt $AB = 2 \cdot a$. Der Flächeninhalt der gesuchten Figur ist daher gleich dem eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und $2 \cdot a$, also gleich $2 \cdot a^2$.

Aufgabe 4.

Die Dreiecke ACB und ADE sind ähnlich. Es gilt $AE = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5} \cdot a$.
Daher gilt für die Flächeninhalte A_1 und A_2 dieser Dreiecke

$$A_1 : A_2 = a^2 : 5a^2$$

und mit $A_2 = a^2$ folgt

$$A_1 = \frac{a^2}{5}.$$

Aufgabe 5.

Es sei

$$a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a + (k-1)) = ka + \frac{k \cdot (k-1)}{2}$$

mit einer ganzen Zahl $k \geq 2$ eine solche Summe. Dann gilt

$$k \cdot (2a + k - 1) = 2 \cdot 345 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23.$$

Wegen $k \leq 2a + k - 1$ kommen für k nur die Wert 2, 3, 5, 6, $10, 15$ und 23 in Frage.
Es gibt daher 7 solche Summen.

Aufgabe 6.

Die größte Teilmenge die keine zwei Zahlen enthält, deren Differenz 8 ist, ist offensichtlich die Menge $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20\}$, hat also 12 Elemente.
Daher ist die kleinste Zahl n gleich 13.

Aufgabe 7.

Wir haben den Beweis in zwei Richtungen zu führen.

- Es sei $AM = AF$.

  Da das Dreieck ACF rechtwinkelig ist, gilt nach dem Satz von Thales $AM = AF$. Daher ist das Dreieck AMF gleichseitig und somit $\angle BAC = 60°$.

- Es sei $\angle BAC = 60°$.

  Da das Dreieck ACF rechtwinkelig ist, gilt wie oben $AM = AF$. Daher ist das Dreieck AMF gleichschenkelig und die Baiswinkel $60° = \angle BAC = \angle FAM$ sind gleich groß. Daher ist auch der dritte Winkel im Dreieck AMF gleich $60°$ und somit das Dreieck AMF gleichseitig. Also gilt $AM = AF$.

Aufgabe 8.

Bezeichnen wir die roten Zahlen mit a, b, c und d, so erhalten wir als Ausdruck für die Summe der grünen Zahlen $ab+bc+cd+da = (a+c)\cdot(b+d)$. Weil $a+c$ und $b+d$ ganze Zahlen ≥ 2 sind, ist $k := a+c$ ein Teiler von 40 zwischen 2 und 20, und $a+c+b+d = k+\frac{40}{k}$. Die in Frage kommenden Teiler von 40 sind 2, 4, 5, 8, 10, 20. Wir erhalten als mögliche Summen die Zahlen $\{22, 14, 13\}$, und jede dieser Zahlen wird tatsächlich angenommen, z.B. wenn (a, b, c, d) die Werte $(1, 1, k-1, \frac{40}{k}-1)$ annimmt.

Aufgabe 9.

Wir können die Ungleichung mit dem gemeinsamen Nenner $(a+1)\cdot(b+1) > 0$ multiplizieren. Wir erhalten die äquivalente Ungleichung

$$a^2 + b^2 \leq ab + 1.$$

Da für jede reelle Zahl t mit $0 \leq t \leq 1$ die Ungleichung $t^2 \leq t$ gilt, genügt es

$$a + b \leq ab + 1$$

zu zeigen. Das ist aber zu

$$0 \leq (1-a)\cdot(1-b)$$

äquivalent und wegen $0 \leq a, b \leq 1$ richtig. Gleichheit gilt für die Zahlenpaare (1, 1), (1, 0) und (0, 1).

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 2.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 4.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 5.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 6.

von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 7.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2013, (siehe [2]). Lösung von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 8.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2009 (nachzulesen in [3]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 9.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2013, (siehe [1]). Lösung von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team.

Literatur

[1] Junior-Regionalwettbewerb 2013. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/513`. (aufgerufen am 07.06.2020).

[2] Junior-Regionalwettbewerb 2018. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/440`. (aufgerufen am 07.06.2020).

[3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2019.