51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Oberstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 12. Juni 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Jakob Steininger zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 9. Juni 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Jakob Steininger bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 12. Juni 2020 von 15:30–17:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Zeige, dass der größte gemeinsame Teiler von n^3+1 und $n-1$ entweder 1 oder 2 ist.

Aufgabe 2. Finde alle a, $b \in \mathbb{Z}$, sodass

$$ab + 2 = a^3 + 2b.$$

Aufgabe 3. Eine natürliche Zahl ist *defizient*, wenn die Summe aller ihrer Teiler (sich selbst nicht eingeschlossen) kleiner ist als die Zahl selbst. z.B. 15, da $1 + 3 + 5 < 15$
Zeige, dass es unendlich viele defiziente Zahlen gibt.

Aufgabe 4. Eine natürliche Zahl ist *abundant*, wenn die Summe aller ihrer Teiler (sich selbst nicht eingeschlossen) größer ist als die Zahl selbst. z.B. 12, da $1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$ ist.
Zeige, dass es unendlich viele abundante Zahlen gibt.

Aufgabe 5.

a) Sei M die Menge der positiven natürlichen Zahlen, von denen kein Primfaktor größer als 3 ist, also $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, \dots\}$. Berechne die Summe der Kehrwerte von M, sprich

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

b) Zeige

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

c) Kann man die Idee von a) mit b) kombinieren, um zu zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt?

Aufgabe 6. Alice und Bob spielen ein Spiel. Zunächst einigen sie sich auf eine positive ganze Zahl n. Anschließend nennen sie abwechselnd (beginnend mit Alice) Teiler von n, die kleiner als n selbst sind und bisher noch nicht genannt wurden. Ein Spieler gewinnt, sobald das kleinste gemeinsame Vielfache aller bisher genannten Zahlen (inklusive der von ihm/ihr gerade genannten Zahl) gleich n ist. Welcher der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie, wenn $n = 2^{34} \cdot 5^{67}$?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Finde ein Vielfaches von $n-1$, das „nahe" an n^3+1 ist.

Aufgabe 2: Dies ist nur möglich, wenn $b = \frac{a^3-2}{a-2}$ eine ganze Zahl ist. Man vermutet, dass dies nur selten möglich ist und benutzt Ideen aus dem vorigen Beispiel.

Aufgabe 3: Wir suchen Zahlen, die sehr wenige Teiler haben...

Aufgabe 4: Wenn k ein Teiler von n ist, dann ist kd ein Teiler von nd.

Aufgabe 5: a) Multipliziere $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots) \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots)$ aus.

b) Teile die Brüche in Gruppen und zeige von jeder Gruppe, dass deren Summe ≥ 0.5 ist.

c) Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, ..., p_r$, berechne dann die Summe in b) mit der Methode aus a).

Aufgabe 6: Sobald einer der Spieler einen Teiler nennt, der durch 2^{34} oder 5^{67} teilbar ist, gewinnt der darauf folgende Spieler, indem er die jeweils andere Zahl sagt.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Es gilt $n-1 \mid (n-1)(n^2+n+1) = n^3-1$ (geometrische Reihe!). Definieren wir $\mathrm{ggT}(n-1,\, n^3+1) =: g$ erhalten wir

$$g \mid n-1 \Rightarrow g \mid n^3-1 \Rightarrow g \mid (n^3+1)-(n^3-1) = 2.$$

Damit ist g tatsächlich entweder 1 oder 2.

Aufgabe 2.

Zunächst erkennt man, dass es bei $b = 0$ keine ganzzahlige Lösung gibt. Die Gleichung lässt sich nun umformen zu

$$(a-2)\cdot b = a^3-2.$$

Da b eine ganze Zahle ungleich 0 ist, gilt $a-2 \mid a^3-2$, wobei man vermutet, dass dies nur selten der Fall ist. In Bezug auf das vorige Beispiel versuchen wir ein Vielfaches von $a-2$ zu finden, das nahe an a^3-2 liegt und man findet tatsächlich

$$(a-2)\cdot(a^2+2a+4) = a^3-8$$

(geometrische Reihe!).
Wir definieren wieder $g := \mathrm{ggT}(a-2,\, a^3-2)$. Bei Lösungen der Gleichung gilt $a-2 \mid a^3-2$ und somit $g = \mathrm{ggT}(a-2,\, a^3-2) = a-2$. Jedoch haben wir

$$g \mid a-2 \Rightarrow g \mid a^3-8 \Rightarrow g \mid (a^3-2)-(a^3-8) = 6.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} &a-2 \mid 6 \\ \Rightarrow\ &a-2 \in \{-6,-3,-2,-1,0,1,2,3,6\} \\ \Rightarrow\ &a \in \{-4,-1,0,1,2,3,4,5,8\}. \end{aligned}$$

Überprüft man diese Möglichkeiten auf $b = \frac{a^3-2}{a-2} \in \mathbb{Z}$ erhält man die 8 Lösungspaare $(a,\, b) \in \{(-4,\, 11), (-1,\, 1), (0,\, 1), (1,\, 1), (3,\, 25), (4,\, 31), (5,\, 41), (8,\, 85)\}$.

Aufgabe 3.

Primzahlen haben nur 1 als Teiler kleiner als sie selbst, sind also deshalb defizient.

Aufgabe 4.

Da 12 eine abundante Zahl ist, betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $12n$. Diese hat unter anderem die Teiler $n, 2n, 3n, 4n$ und $6n$, deren Summe $16n$ ist. Dadurch ist $12n$ für jedes n abundant.

Aufgabe 5.

a.) M besteht genau aus allen Zahlen 2^a3^b, wobei a und b natürliche Zahlen sind. Multipliziert man somit

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots)\cdot(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots)$$

aus, erhält man die gesuchte Summe. Durch die Formel für unendliche geometrische Summen gilt

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2-1}=2$$
$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}.$$

Die gesuchte Summe ist damit $2\cdot\frac{3}{2}=2$.

b.) Es gilt

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}\cdot 8=\frac{1}{2}$$
$$\cdots$$
$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}>\frac{1}{2^{n+1}}\cdot 2^n=\frac{1}{2}.$$

Dadurch ist gezeigt, dass die Summe unendlich ist.

c.) Beweisskizze: Angenommen es gäbe nur r Primzahlen $p_1,...,p_r$. Dann hätte jede Zahl eine Primfaktorzerlegung, die nur aus diesen r verschieden Primfaktoren besteht. Damit könnte man die unendliche Summe in b) berechnen als

$$\Big(\frac{p_1}{p_1-1}\Big)\cdots\Big(\frac{p_r}{p_r-1}\Big).$$

Da dies ein endliches Produkt ist, ist es selbst endlich. Ein Widerspruch zu b).

Aufgabe 6.

Alle Teiler von $n=2^{34}\cdot 5^{67}$ die kleiner sind als n, sind von der Form 2^a5^b wobei $0\le a\le 34$, $0\le b\le 67$ und $(a,b)\ne(34,67)$. Sobald einer der Spieler einen Teiler nennt, der durch 2^{34} oder 5^{67} teilbar ist, sprich einen Teiler mit $a=34$ oder $b=67$, gewinnt der darauf folgende Spieler indem er entsprechend die andere Zahl 5^{67} oder 2^{34} sagt.
Deshalb versuchen beide Spieler Teiler mit $0\le a\le 33$ und $0\le b\le 66$ zu nennen und der/die erste, dem/der das nicht gelingt, verliert. Es gibt genau $34\cdot 67$ solcher Zahlen, und da dies eine gerade Zahl ist, wird der zweite Spieler (Bob) die letzte solche Zahl nennen. Daraufhin sagt Alice eine mit $a=34$ oder $b=67$ woraufhin Bob gewinnen kann.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 2.

aus [1]

Literatur

[1] Schweizer Vorrunde 2019. https://imosuisse.ch/smo/pruefungen/smo2019/vorrunde/pruefung/vorrunde_2019_de.pdf. (aufgerufen am 15. Juni 2020).