51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Oberstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 19. Juni 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 16. Mai 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 19. Juni 2020 von 15:30–17:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns,wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Die Ziffernsumme (auch Quersumme) $Zi(a)$ einer Zahl a ist die Summe der Ziffern. z.B. ist $Zi(356) = 3 + 5 + 6 = 14$.
Sei $a = 2019^{2020}$. Bestimmt man $Zi(a)$ und anschließend $Zi(Zi(a))$ und dann $Zi(Zi(Zi(a)))$ usw. so lange, bis die sich ergebende Zahl einstellig ist (und sich somit bei weiterer Anwendung von Zi nicht mehr ändert), so erhält man welche Zahl?

Aufgabe 2. Seien $\langle x_n \rangle$ und $\langle y_n \rangle$ Folgen mit der Eigenschaft $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ und

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - 4y_n}{5} \quad \text{und} \quad y_{n+1} = \frac{4x_n + 3y_n}{5}.$$

Bestimme

$$S_{2020} = x_{2020}^2 + y_{2020}^2.$$

Aufgabe 3. Bestimme alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, so dass folgendes gilt:
Alle Potenzen a^n mit $n \geq 1$ haben dieselben letzten drei Stellen wie a. (d.h. a und alle Zahlen a^n stimmen in der Einer-, Zehner- und Hunderterstelle jeweils überein)

Aufgabe 4. Zeige, dass die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ in den ganzen Zahlen nur die triviale Lösung $(0, 0, 0)$ hat.

Aufgabe 5. Für welche Werte von p und q sind die Lösungen der Gleichung $x^3 - px^2 + 11x - q = 0$ drei aufeinander folgende ganzen Zahlen?

Aufgabe 6. Löse in den ganzen Zahlen

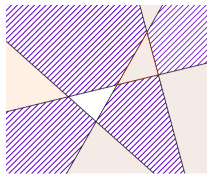
$$2xy + 3y^2 = 24$$

Aufgabe 7. In einem Dreieck ABC werden drei Kreis k_1, k_2 und k_3 eingezeichnet. (a, b, c sind die Seiten, die den gleichnamigen Eckpunkten gegenüberliegen)
k_1 ist der Kreis durch A und B, der a berührt.
k_2 ist der Kreis durch B und C, der b berührt.
k_3 ist der Kreis durch C und A, der c berührt.
Zeige, dass die drei Kreise einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Aufgabe 8. Wie viele Lösungen in den ganzen Zahlen hat die Gleichung

$$2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10?$$

Aufgabe 9.
Die Ebene werde durch n Geraden in Teilgebiete zerlegt. Gebiete, die eine gemeinsame Begrenzungslinie haben, nennen wir benachbart.
Zeige: Alle Gebiete lassen sich mit zwei Farben so färben, dass benachbarte Gebiete immer verschieden gefärbt sind.



Beachte: ein Gebiet ist hier ein zusammenhängendes, von geraden Linien begrenztes Flächenstück, dessen Rand nicht zu dem Gebiet gehört.

Aufgabe 10. Auf jedem Feld eines 3×3 – Schachbretts sitzt ein Käfer. Sobald die Pausenglocke ertönt, wechselt jeder Käfer auf ein benachbartes Feld. *(Zwei Felder heißen benachbart, wenn sie eine Kante gemeinsam haben.)*
Zeige: Nach dem Wechsel gibt es mindestens ein Feld, auf dem zwei oder mehr Käfer sitzen.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Wie wirkt sich die Ziffernsummenbildung von a und b auf die Ziffernsummenbildung von $a \cdot b$ aus?

Aufgabe 2. Man kann vermuten, dass S konstant für alle n ist.

Aufgabe 3. Welche Einerziffer kommt in Betracht? Betrachte anschließend die Gleichung unter einem geeigneten Modul

Aufgabe 4. Es geht um gerade oder ungerade. Zwei Fälle sind möglich.

Aufgabe 5. Die drei Lösungen sind $(a-1),\ a$ und $(a+1)$. Anschließend wird die Aufspaltung der Gleichung 3. Grades in lineare Faktoren anzuwenden sein.

Aufgabe 6. Entweder: Die Gleichung ist linear in x.
Oder: Behandle die Gleichung als quadratische Gleichung in y. Was lässt sich über die sich ergebende Diskriminante sagen?

Aufgabe 7. Peripheriewinkelsatz; insbesondere jener Teil des Satzes, der eine Aussage über den Winkel zwischen der Sehne und der Tangente in einem Sehnenendpunkt macht.

Aufgabe 8. Zählen!

Aufgabe 9. Vollständige Induktion

Aufgabe 10. Jedes Feld hat Koordinaten (x, y) mit $1 \leq x \leq 3$ und $1 \leq y \leq 3$.
Jedem Käfer kann $x + y$ zugeordnet werden...

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Seien zum Beispiel $a = 57$ und $b = 38$ gegeben. Dann gilt

$$a \cdot b = 57 \cdot 38 = (5 \cdot 10 + 7) \cdot (3 \cdot 10 + 8) = 5 \cdot 3 \cdot 100 + (5 \cdot 8 + 3 \cdot 7) \cdot 10 + 7 \cdot 8$$

Mehrmalige Anwendung von Zi auf $a \cdot b$ liefert

$$Zi(57 \cdot 38) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 8 = 132 \Rightarrow Zi(Zi(57 \cdot 38)) = Zi(132) = 6.$$

Andererseits gilt auch

$$Zi(57) \cdot Zi(38) = (5 + 7) \cdot (3 + 8) = 12 \cdot 11 = 132 \Rightarrow Zi(132) = 6$$

Sei nun Z die genügend oftmalige Anwendung der Ziffernsummenbildung Zi. Wir vermuten, dass

$$Z(a \cdot b) = Z(a) \cdot Z(b)$$

gilt.
Sind a und b zweistellig, so ist

$$a \cdot b = (10a_1 + a_0) \cdot (10b_1 + b_0) = (a_1b_1 \cdot 100 + (a_1b_0 + a_0b_1) \cdot 10 + a_0b_0)$$

und die Anwendung von Zi ergibt $a_1b_1 + a_1b_0 + a_0b_1 + a_0b_0$.
Das Produkt der direkten Anwendung von Zi auf die einzelnen Faktoren a und b führt auf dasselbe Ergebnis.
Zurück zum Beispiel: $a = 2019^{2020}$ ist gegeben.

$n = 1$: $Zi(2019) = 12 \Rightarrow Zi(Zi(2019)) = Zi(12) = 3$

$n = 2$: $Zi(2019^2) = Zi(4076361) = 27 \rightarrow Zi(27) = 9$
bzw. $Zi(2019) \cdot Zi(2019) = 12 \cdot 12$ und $Zi(Zi(12)) \cdot Zi(Zi(12)) = 3 \cdot 3 = 9$

$n = 3$: $Zi(2019^3) = Zi(8230172859) = 45 \rightarrow Zi(45) = 9$
bzw. $Zi(2019^3) = Zi(2019^2) \cdot Zi(2019) = 9 \cdot 12 = 108 \rightarrow Zi(108) = 9$.

Mittels Induktionsbeweis erhalten wir $Z(2019^n) = 9$ für $n \geq 2$, also auch $Z(2019^{2020}) = 9$.
Alternativer Beweis: Die Zahl $2019 = 3 \cdot 667$ ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar (der Rest von 2019 bei Division durch 9 ist 3.). Für jede Potenz $n \geq 2$ ist 2019^n ein Vielfaches von 9. Durch Anwenden der Ziffernsummenbildung bleibt der Rest bei Division durch 9 erhalten. Dies folgt aus der Teilbarkeitsregel durch 9: eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist. Wendet man also die Funktion Zi auf eine Zahl a so oft an, bis eine einstellige Zahl übrig bleibt, so ist diese Zahl genau der Rest von a bei Division durch 9, oder 9 selbst, falls die Ausgangszahl a ein Vielfaches von 9 ist. Für $a = 2019^{2020}$ ist das Ergebnis demnach 9.

Aufgabe 2.

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion, weil wir durch das Berechnen kleiner Werte von n die Vermutung aufstellen, dass der Wert S_n immer 1 ist.

Induktionsbasis: Sei $n = 1$. Dann gilt $S_1 = x_1^2 + y_1^2 = 1$.
Induktionsvoraussetzung (I.V.): $S_n = 1$.
Induktionsbehauptung: $S_{n+1} = 1$.
Induktionsschritt: (zeige, dass aus $S_n = 1$ folgt, dass $S_{n+1} = 1$ gilt)

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 &= \left(\frac{3x_n - 4y_n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4x_n + 3y_n}{5}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{25}(9x_n^2 + 16y_n^2 - 24x_n \cdot y_n + 16x_n^2 + 9y_n^2 + 24x_n \cdot y_n) = \frac{1}{25}(25x_n^2 + 25y_n^2) = \\
&= x_n^2 + y_n^2 \overset{\text{I.V.}}{=} 1.
\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass die Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung folgt, und der Beweis, dass $S_n = 1$ für alle $n \geq 1$ gilt, ist damit abgeschlossen.

Aufgabe 3.

Sei $a = \overline{xyz} = 100x + 10y + z$ und somit $a^2 = 10000x^2 + 100y^2 + z^2 + 2000xy + 200xz + 20yz$. Die gegebene Bedingung lautet

$$a \equiv a^2 \equiv a^3 \equiv \dots \pmod{1000}$$

Wir bemerken zunächst, dass für die Einerstelle z von a nur die Ziffern der Menge $\{1, 5, 6, 0\}$ in Betracht kommen. Wir untersuchen die einzelnen Fälle.

$z = 6$. Aufgrund der geforderten Bedingung muss jedenfalls auch die Gleichung

$$a \equiv a^2 \pmod{100}$$

gelten. Setzt man den Wert von z in a bzw. a^2 ein, so ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&10y + 6 \equiv 36 + 20 \cdot y \cdot 6 \pmod{100} \\
\Leftrightarrow &10y + 6 \equiv 36 + 20y \pmod{100} \\
\Leftrightarrow &0 \equiv 30 + 10y \pmod{100} \quad |: 10 \text{ Achtung: Modul auch dividieren} \\
\Leftrightarrow &0 \equiv 3 + y \pmod{10} \quad \Rightarrow y = 7.
\end{aligned}$$

Jetzt wird die Gleichung modulo 1000 betrachtet:

$$\begin{aligned}
&a \equiv a^2 \pmod{1000} \\
&100x + 10 \cdot 7 + 6 \equiv 100 \cdot 7^2 + 6^2 + 200 \cdot x \cdot 6 + 20 \cdot 7 \cdot 6 \pmod{1000} \\
\Leftrightarrow &100x + 40 \equiv 1740 + 200x \pmod{1000} \\
\Leftrightarrow &0 \equiv 700 + 100x \pmod{1000} \quad |: 100 \text{ Achtung: Modul auch dividieren} \\
\Leftrightarrow &0 \equiv 7 + x \pmod{10} \quad \Rightarrow x = 7.
\end{aligned}$$

Die erste Lösung ist somit $a = 376$.

$z = 5$. Führt mit derselben Methode auf $a = 625$.

$z = 1$. Man erhält $x = y = 0$. Das stellt keine Lösung dar, da a dreistellig ist.

$z = 0$. In diesem Fall ist auch $x = y = 0$. Also keine weitere Lösung.

Also ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{376,\ 625\}$.
Bemerkung. Dadurch sind auch die höheren Potenzen kongruent zu a modulo 1000.

Aufgabe 4.

Die rechte Seite der Gleichung ist gerade, also auch die linke. Allgemein gilt: Die Zahlen t und t^2 haben denselben Rest bei Division durch 2.
Also sind entweder alle drei Zahlen gerade, oder genau eine der drei Zahlen ist gerade und die anderen beiden Zahlen sind ungerade.

1. Fall: alle drei gerade.

Seien $x = 2a$, $y = 2b$ und $z = 2c$ mit ganzen Zahlen a, b und c.

Einsetzen in die Gleichung ergibt: $a^2 + b^2 + c^2 = 4abc$.

Die rechte Seite ist durch 4 teilbar, die linke Seite ist genau dann durch 4 teilbar, wenn sowohl a, b als auch c gerade sind (betrachten der linken Seite modulo 4.) Dieses Argument kann unendlich weiter fortgeführt werden (*unendlicher Abstieg*) und führt dadurch auf einen Widerspruch, ausgenommen $x = y = z = 0$. Dieses Tripel ist die einzige Lösung in diesem Fall.

2. Fall: zwei ungerade.

Sei o.B.d.A. x gerade. Dann können wir schreiben: $x = 2a, y = 2b + 1$ und $z = 2c + 1$ mit ganzzahligen Werten a, b und c.

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$4a^2 + 4b^2 + 4b + 1 + 4c^2 + 4c + 1 = 4a \cdot (2b + 1) \cdot (2c + 1)$$

Betrachte die Gleichung modulo 4

$$2 \equiv 0 \pmod{4},$$

das ist ein Widerspruch.

Aufgabe 5.

Seien $a - 1$, a und $a + 1$ die drei ganzzahligen Lösungen der Gleichung. Die gegebene Gleichung ist normiert (d.h. der führende Koeffizient ist 1). Also ist die Gleichung nach der Verallgemeinerung des Satzes von Vieta identisch zu

$$(x - (a - 1)) \cdot (x - a) \cdot (x - (a + 1)) = 0$$

Wir peilen einen Koeffizientenvergleich an:

$$\begin{aligned}(x - (a - 1)) \cdot (x - a) \cdot (x - (a + 1)) &= (x - a) \cdot ((x - a)^2 - 1) = 0\\ &= (x - a)^3 - (x + a) = 0\\ &= x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 - x + a = 0\\ &= x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - 1)x + a - a^3 = 0\end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt

$$x^3 - px^2 + 11x + q = 0$$

und somit $-p = -3a, 3a^2 - 1 = 11$ und $a - a^3 = -q$.
Wir erhalten $a \in \{\pm 2\}$ und unterscheiden die beiden Fälle:

$a = 2$: $p = 6$ und $q = 6$, $\mathbb{L} = \{1, 2, 3\}$.

$a = -2$: $p = -6$ und $q = -6$, $\mathbb{L} = \{-3, -2, -1\}$.

Aufgabe 6.

1. Lösung. Die Gleichung ist linear in x. Wir formen nach x um und erhalten

$$x = \frac{24 - 3y^2}{2y} = \frac{3(8 - y^2)}{2y}$$

also $2 \mid 8 - y^2$, da x ganzzahlig ist.

Somit gilt auch $2 \mid y$ und wir schreiben $y = 2z$ für eine ganze Zahl z.:

$$x = \frac{3(8 - 4z^2)}{4z} = \frac{3(2 - z^2)}{z}$$

und somit $z \mid 6 - 3z^2$, da x ganzzahlig ist.

Da $z \mid 3z^2$ folgt, dass $z \mid 6$ und demnach $z \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Diese 8 Fälle führen sofort auf

$\mathbb{L} = \{(3, 2); (-3, 2); (-3, 4); (3, -4); (-7, 6); (7, -6); (-17, 12); (17, -12)\}$.

2. Lösung. Die Gleichung ist eine quadratische Gleichung in y. Wir wenden die allgemeine Lösungsformel auf $3y^2 + 2x \cdot y - 24 = 0$ an:

$$y_{1,2} = \frac{-2x \pm 2 \cdot \sqrt{x^2 + 3 \cdot 24}}{6}.$$

Da y ganzzahlig ist, muss die Diskriminante $D = x^2 + 3 \cdot 24$ eine Quadratzahl sein, also

$$\begin{aligned} & x^2 + 72 = t^2 \\ \Leftrightarrow & (t - x) \cdot (t + x) = 72 \end{aligned}$$

für eine ganze Zahl $t \geq 0$.

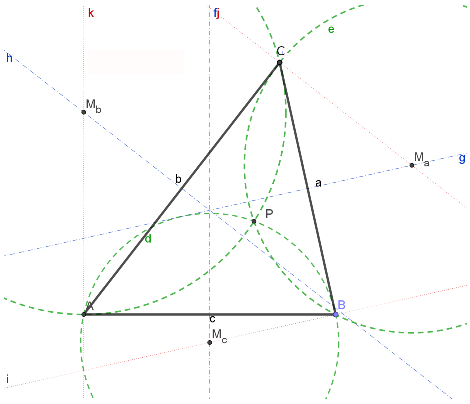
Durch Zerlegung von 72 in das Produkt zweier Faktoren,

$72 = (\pm 1) \cdot (\pm 72) = (\pm 2) \cdot (\pm 36) = (\pm 3)(\pm 24) = \ldots$

ergeben sich alle Fälle, die sofort zu obiger Lösungsmenge führen.

Aufgabe 7.

Sei $P := k_2 \cup k_3$. Wir wollen zeigen, dass P auch auf k_1 liegt.
Nach dem Sehnen-Tangentensatz in k_2 gilt mit $\angle(b, BC) = \gamma$ und Tangente b, dass $\angle CPB = 180° - \gamma$ ist.
Nach dem Sehnen-Tangentensatz in k_3 gilt mit $\angle(c, AC) = \alpha$ und Tangente c, dass $\angle APC = 180° - \alpha$ ist.



Damit gilt, dass

$$\angle APB = 360° - (180° - \gamma + 180° - \alpha) = \gamma + \alpha = 180° - \beta$$

und nach Umkehrung des Sehnen-Tangentensatzes folgt, dass P auf k_1 liegt.

Aufgabe 8.

Wir stellen fest, dass $|a| \leq 2$ sein muss, folglich $a \in \{0, \pm1, \pm2\}$. Wir unterscheiden demnach die folgenden Fälle:

$a = 0$. Die einzige Möglichkeit ist $3^2 + 1^2 + 0 = 10$.

Somit ist $(b,\ c,\ d)$ eine Variation der Menge $(\pm3,\ \pm1,\ 0)$. Teilen wir zunächst die drei Ziffern zu, so gibt es dafür 3! Variationen. Jede Zuteilung hat danach dann 4 Möglichkeiten für die Wahl der beiden Vorzeichen (beides positiv, eines negativ, beide negativ).

Insgesamt sind das $3! \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

$|a| = 1$. Ein Lösungstripel $(b,\ c,\ d)$ der Gleichung $b^2 + c^2 + d^2 = 8$ kann nur eine Variation der Menge $(\pm2,\ \pm2,\ 0)$ sein. Es gibt $3 \cdot 2^2 = 12$ Variationen dieser Menge und da $a \in \{\pm1\}$ ist, sind das $2 \cdot 12 = 24$ Möglichkeiten für diesen Fall.

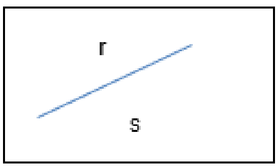
$|a| = 2$. Die Gleichung $b^2 + c^2 + d^2 = 2$ ist nur für eine Variation der Menge $(\pm1,\ \pm1,\ 0)$ erfüllt.

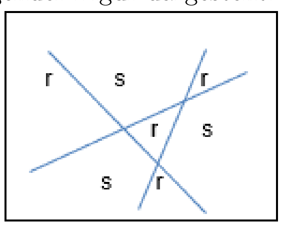
Wiederum erhalten wir wie im vorherigen Fall 2 Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also 72 Lösungen.

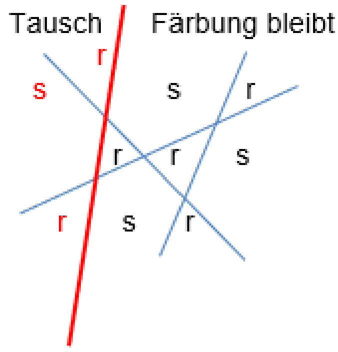
Aufgabe 9.

Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion. Für kleine Werte von$n$, also $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ ist eine Färbung in die beiden Farben r und s möglich.
Induktionsbasis: Die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 3$ sind in folgender Figur dargestellt:





Induktionsvoraussetzung: Bei n Geraden lassen sich alle Gebiete mit zwei Farben r und s so färben, dass benachbarte Gebiete immer verschieden gefärbt sind.
Induktionsbehauptung: Eine derartige Färbung ist auch für $n{+}1$ Geraden möglich.

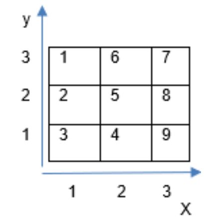


Induktionsschluss: Wir setzen voraus, dass es eine solche Färbung für n Geraden gibt und fügen eine neue Gerade hinzu (hier in rot eingezeichnet).
Wir lassen nun auf der einen Halbebene der Gerade die Färbung, wie sie ist und auf der anderen Halbebene ersetzen wir die Farbe jedes Gebietes durch die andere Farbe.

Mit dieser Methode gibt es auch eine passende Färbung für $n{+}1$ Geraden und wir haben den Beweis abgeschlossen.

Aufgabe 10.

Die Käfer haben die Nummern $1, \ldots, 9$ und sind irgendwie laut Angabe am Schachbrett verteilt.



Ein Beispiel ist in nebenstehender Figur abgebildet. Hier sitzt der Käfer 8 zum Beispiel auf dem Feld (3, 2). Wir ordnen jedem Käfer die Summe der beiden aktuellen Koordinaten zu, dem Käfer 8 in diesem Fall die zahl $3 + 2 = 5$, er sitzt also auf einem ungeraden Feld.

Es gibt 5 gerade und 4 ungerade Felder, wie in nebenstehender Abbildung zu sehen. Da jedes Feld von genau einem Käfer besetzt ist, haben 5 Käfer die Parität g und 4 Käfer die Parität u.

g	u	g
u	g	u
g	u	g

Die entscheidende Erkenntnis ist, dass sich *bei einem Wechsel die Parität des Käfers ändert.* Also haben nach dem Erklingen der Pausenglocke 5 Käfer die Parität u und 4 Käfer die Parität g.
Dies ist aber mit einer 1 zu 1 Verteilung von Käfer auf Felder nicht machbar, weswegen es ein mindestens doppelt besetztes und somit auch mindestens ein leeres Feld gibt.
Zusammenfassend erhält man den Widerspruch dadurch, dass
VORHER die Gesamtparität G aller Käfer $5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \equiv 0 \pmod 2$
und
NACHHER die Gesamtparität $G = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \equiv 1 \pmod 2$
beträgt.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

aus [4], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [2, S. 124], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

aus [1, Bsp. 56] bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

aus [5, S.227/ VII], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

aus [1, Bsp. 56] bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 8.

[3, Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2009] bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

aus [4, S. 22], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 10.

aus [4, S. 68], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Literatur

[1] Österreichische Mathematik-Olympiade skriptum. wettbewerbsaufgaben von 1970–1975.

[2] Arthur Engel. *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1998.

[3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.

[4] Natalia Grinberg. *Lösungsstrategien: Mathematik für Nachdenker.* Harri Deutsch Verlag, 2008.

[5] Jiri Herman, Radan Kučera, Radan Kucera, Jaromír Šimša, and Jaromir Simsa. *Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2000.