51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnen-/Fortgeschrittenen-1-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 22. November 2019

Teilbarkeit und Kongruenzen

Definition (Teilbarkeit)**.** Eine ganze Zahl t heißt Teiler einer ganzen Zahl v, wenn es eine ganze Zahl n gibt, sodass $t \cdot n = v$ gilt.

Beispiele.
18 ist Teiler von 90, weil $18 \cdot 5 = 90$ gilt.
0 ist Teiler nur von 0, weil $0 \cdot x = 0$ für alle x.
1 ist Teiler jeder Zahl y, weil $1 \cdot y = y$.
Jede Zahl z ist Teiler von sich selbst, weil $z \cdot 1 = z$.

Definition (Kongruenz zweier Zahlen)**.**

$$a \equiv b \mod m \quad (a \text{ ist kongruent zu } b \text{ modulo } m),$$

wenn $a - b$ durch m teilbar ist.

Beispiele.
$18 \equiv 3 \mod 5$, weil $18 - 3 = 15$ durch 5 teilbar ist.
$c \equiv 0 \mod m$ bedeutet, dass c durch m teilbar ist.

Bemerkung. Die Moduln 0 und 1 werden nicht verwendet.

Rechenregeln (für das Rechnen mit Kongruenzen)**.**
$a \equiv a \mod m$ gilt für alle Moduln m.
$a \equiv b \mod m \Leftrightarrow b \equiv a \mod m$.
$(a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m) \Rightarrow a \equiv c \mod m$.
$a \equiv b \mod m \Rightarrow a + c \equiv b + c \mod m$ für alle $c \in \mathbb{Z}$.
$a \equiv b \mod m \Rightarrow a \cdot n \equiv b \cdot n \mod m$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$(a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m) \Rightarrow a + c \equiv b + d \mod m$.
$(a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m) \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d \mod m$.
$(\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ und $a \equiv b \mod m$ und $a \equiv b \mod n) \Rightarrow a \equiv b \mod m \cdot n$.
$(a \cdot b \equiv 0 \mod p$ und p prim$) \Rightarrow (a \equiv 0 \mod p$ oder $b \equiv 0 \mod p)$.
$(\mathrm{ggT}(m, a) = 1$ und $a \cdot b \equiv a \cdot c \mod m) \Rightarrow b \equiv c \mod m$.

Definition (Restklasse modulo m)**.** Sei r eine natürliche Zahl $< m$, so nennt man die Menge aller ganzen Zahlen, die zu r kongruent modulo m sind, die Restklasse r modulo m.

Bemerkung. Es gibt genau m Restklassen modulo m.

Beispiel.
Die geraden Zahlen sind die Restklasse 0 und die ungeraden Zahlen die Restklasse 1 modulo 2.

Aufgaben

1. (Landeswettbewerb 2010, Birgit Vera Schmidt) Man zeige, dass 2010 nicht als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden kann.
2. Die beiden Zahlen $a = 2019^6$ und $b = 2 \cdot 17 \cdot 113 \cdot 157 \cdot 1061 \cdot 105838948573$ unterscheiden sich um genau 1. Welche der beiden Zahlen ist größer?
3. Man beweise: $2017^n + 2018^{2n} + 2019^{3n}$ ist für keine natürliche Zahl n eine Quadratzahl.
4. Man berechne die Einer-, Zehner- und Hunderter-Ziffer der Zahl 2015^{2016}.
5. Man bestimme alle (im dekadischen System) zweistelligen Zahlen, deren Quadrate die Ziffernsumme 27 haben.
6. Man bestimme alle ganzen Zahlen n, sodass $n^4 + 2019$ durch 5 teilbar ist.
7. Man zeige, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, für die $4x^2 - 3y^2 = 2021$ gilt.
8. Man beweise, dass $\frac{2018^{2020}-1}{2019}$ eine ganze Zahl ist.
9. Ist $2020^{2015} + 1$ eine Primzahl?
10. Für welche natürlichen Zahlen n ist $2^n + 1$ oder $2^n - 1$ durch 15 teilbar?