Steirischer Unterstufenwettbewerb 2022
Mittwoch, 20.4.2022 — Teil I Lösungen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	B	D	C	C	D	E	A	E

I-01: Die Jahreszahl 2022 wird mit genau zwei verschiedenen Ziffern geschrieben, nämlich mit den Ziffern 0 und 2. Wie viele Jahreszahlen hat es, beginnend mit 2000, mit dieser Eigenschaft bis inklusive 2022 gegeben?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: In jedem Jahr waren die ersten beiden Ziffern 20... Es gab mit diesen beiden Ziffern die vier Jahre

$$2000, 2002, 2020, 2022.$$

Die richtige Antwort ist also D.

I-02: Alle Seitenlängen eines Rechtecks mit dem Umfang 30 cm sind Primzahlen. Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks?

(A) 10 cm^2 (B) 15 cm^2 (C) 22 cm^2 (D) 26 cm^2 (E) 35 cm^2

Lösung: Wir bemerken, dass jede der angebotenen Antworten das Produkt von zwei Primzahlen ist. Es gilt nämlich

$$10 = 2 \cdot 5, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 22 = 2 \cdot 11, \quad 26 = 2 \cdot 13, \quad 35 = 5 \cdot 7,$$

und die Umfänge, die sich aus diesen Zahlen ergeben sind

$$2(2+5) = 14, \quad 2(3+5) = 16, \quad 2(2+11) = 26, \quad 2(2+13) = 30, \quad 2(5+7) = 24.$$

Da der Umfang mit 30 vorgegeben ist, sind die Seitenlängen daher 2 und 13 und der Flächeninhalt somit 26.
Die richtige Antwort ist also D.

I-03: Anita möchte eine Ziffer a mit der Eigenschaft finden, dass die drei-ziffrige Zahl aaa als Produkt einer ein-ziffrigen und einer zwei-ziffrigen Zahl geschrieben werden kann (also so, wie z.B. 405 geschrieben werden kann als $5 \cdot 81$). Wie viele verschiedene Ziffern a mit dieser Eigenschaft gibt es?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Lösung: Anita schreibt

$$aaa = a \cdot 111 = a \cdot 3 \cdot 37.$$

Da 37 eine Primzahl ist, kann der zwei-ziffrige Faktor von aaa nur ein zwei-ziffriges Vielfaches von 37 sein, also 37 oder $2 \cdot 37 = 74$. Es gilt also entweder

$$aaa = (3a) \cdot 37$$

oder

$$aaa = \frac{3a}{2} \cdot 74.$$

Im ersten Fall kann der Wert von $3a$ entweder 3, 6 oder 9, also a entweder 1, 2 oder 3. Tatsächlich gilt

$$111 = 3 \cdot 37, \quad 222 = 6 \cdot 37 \quad \text{und} \quad 333 = 9 \cdot 37.$$

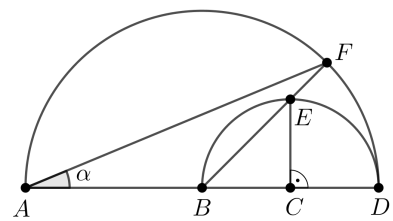
Im zweiten Fall kann der Wert von $\frac{3a}{2}$ wieder entweder 3, 6 oder 9 sein, also A entweder 2, 4 oder 6. Tatsächlich gilt

$$222 = 3 \cdot 74, \quad 444 = 6 \cdot 74 \quad \text{und} \quad 666 = 9 \cdot 74.$$

Die Zahl 222 kann also sogar auf zwei verschiedene Arten angeschrieben werden und es gibt fünf Möglichkeiten für die Ziffer a, nämlich $1, 2, 3, 4$ und 6.

Die richtige Antwort ist also B.

I-04: In folgender Figur ist B der Mittelpunkt von AD und C der Mittelpunkt von BD. B und C sind die Mittelpunkte der Halbkreise. Wie groß ist der Winkel α?



(A) 18° (B) 20,5° (C) 21° (D) 22,5° (E) 24°

Lösung: Das Dreieck BCE ist gleichschenkelig, und es gilt somit $\angle CBE = 45°$. Dies ist der Außenwinkel im ebenfalls gleichschenkeligen Dreieck ABF, und es gilt somit

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \angle CBE = \frac{1}{2} \cdot 45° = 22,5°.$$

Die richtige Antwort ist also D.

I-05: Zita hat auf ihrem Handy eine Timerapp, die die Sekunden in einer zweistelligen Anzeige von 99 bis 00 herunterzählt. Zum Zeitpunkt t_1 zeigt die App zum letzten Mal zwei Ziffern mit dem Produkt 12 an und zum Zeitpunkt t_2 zum vorletzten Mal. Wie viele Sekunden vergehen von t_2 bis t_1?

(A) 4 sek (B) 6 sek (C) 8 sek (D) 10 sek (E) 12 sek

Lösung: Zeigt der Timer eine Zeit mit der Zehnerziffer 0, so ist das Produkt der Ziffern sicher 0. Zeigt er eine Zeit mit der Zehnerziffer 1, so ist das Produkt der Ziffern gleich der Einerziffer, also einstellig. In diesen Fällen ist das Produkt der Ziffern sicher nicht 12.

Ist die Zehnerziffer 2, so zeigt die App wegen $12 : 2 = 6$ $t_1 = 26$ Sekunden an. Ist die Zehnerziffer 3, so zeigt die App wegen $12 : 3 = 4$ $t_2 = 34$ Sekunden an. Wegen $t_2 - t_1 = 34 - 26 = 8$ vergehen von t_2 bis t_1 genau 8 Sekunden.

Die richtige Antwort ist also C.

I-06: Wir bezeichnen die größte vierziffrige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern und ungerader Einerziffer als B und die kleinste vierziffrige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern und ungerader Zehnerziffer als A. Wie lautet die Zahl $B - A$?

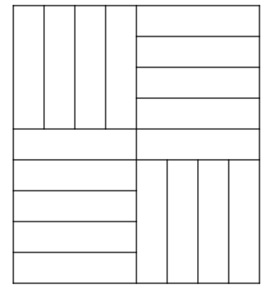
(A) 8641 (B) 8642 (C) 8843 (D) 8853 (E) 8888

Lösung: Die größte vierziffrige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern ist 9876 und die größte vierziffrige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern und ungerader Einerziffer ist daher $B = 9875$. Die kleinste vierziffrige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern ist 1023 und die kleinste vierziffrige Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern und ungerader Zehnerziffer ist daher $A = 1032$.

Wir erhalten somit

$$B - A = 9875 - 1032 = 8843.$$

Die richtige Antwort ist also C.



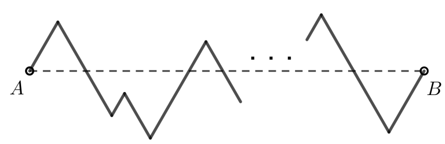
I-07: Das Spiel *Schiach* wird auf einem Brett mit 18 kongruenten rechteckigen Feldern gespielt, wie in der Abbildung zu sehen ist.
Eine Schiachfigur steht auf einem Feld und kann in einem Zug auf ein beliebiges anderes Feld ziehen, mit dem dieses ein Stück einer Seite gemeinsam hat. (Auf ein Feld, das nur am Eck berührt wird, kann es nicht ziehen.) Wir sagen, zwei Felder sind „n Felder auseinander“, wenn die Figur in n Zügen von einem zum anderen ziehen kann, aber nicht mit weniger. Was ist der größte Wert von n, der für zwei Felder auf diesem Brett als Wert auftritt?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Der kürzeste Weg vom Feld rechts oben zum Feld links unten benötigt 5 Züge. Man kann leicht überprüfen, dass keine anderen Paare einen größeren Wert von n bestimmen.

Die richtige Antwort ist also D.

I-08: Wuschi Wurm will vom Punkt A zum Punkt B kriechen. Er könnte auf einer geraden Strecke dort hin kommen, ist aber etwas verwirrt. Er kriecht deshalb in einem Zick-zackkurs. Zuerst kriecht er in einer etwas nach oben abweichenden Richtung und nachdem er seinen Fehler bemerkt, ändert er die Richtung und kriecht in einer nach unten abweichenden Richtung. Dann geht es wieder nach oben, nach unten, und so weiter, bis er endlich in B ankommt. Jedes Stück seines Wegs (oder seine Verlängerung) schließt einen Winkel von 60° mit der Strecke AB ein.



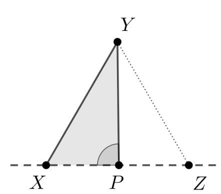
Um wie viel Prozent ist sein Weg auf diese Art länger, als wenn er gerade von A nach B kriechen würde?

(A) Es hängt von der Anzahl der Richtungswechsel ab.

(B) Es hängt von der Länge der Strecke AB ab.

(C) 50% (D) $66\frac{2}{3}$% (E) 100%

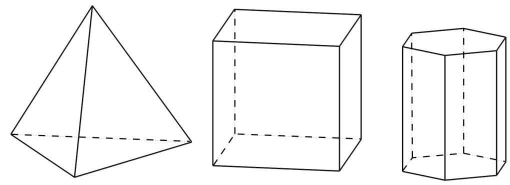
Lösung: In folgender Figur sehen wir ein Stück XY des Zick-zackwegs von Wuschi Wurm.



Da alle Teile des Wegs 60° mit der Waagrechten einschließen, kann man XY zum gleichseitigen Dreieck XYZ ergänzen. Die Höhe YP in diesem Dreieck halbiert in P die Seite XZ, die gleich lang ist wie XY. Die schräge Strecke XY ist daher immer doppelt so lang wie die waagrechte Strecke XP, und der Zick-zackweg von Wuschi Wurm ist daher ebenso doppelt so lang wie es der gerade Weg von A nach B wäre. Er ist somit um 100% länger als der gerade Weg.

Die richtige Antwort ist also E.

I-09: Polly sammelt Polyeder, also ebenflächig begrenzte Körper. Immer wenn sie einen neuen Körper mit genau n Seitenflächen sieht, macht sie davon ein Handyfoto und schreibt dann in ihr „*Polly-eder Album*“ die neue Zahl n. Im Bild sehen wir zum Beispiel Körper mit $n = 4, 6$ und 8.



Wie viele positive ganze Zahlen gibt es, die sie sicher niemals in ihr Album schreiben kann?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) keine (E) unendlich viele

Lösung: In jedem Eckpunkt eines Körpers treffen sich mindestens 3 Seitenflächen. Drei Flächen schließen daher sicher keinen geschlossenen Bereich im Raum ein. Jeder Körper hat also mindestens 4 Seitenflächen. Für $n \geq 4$ hat eine Pyramide mit einem $n-1$-eck als Basis neben der Basis noch $n-1$ Dreiecke als Seitenflächen. Zusammen ergibt dies also n Seitenflächen, und jeder Wert $n \geq 4$ ist daher möglich. Die einzigen positiven ganzen Zahlen, die Polly niemals in ihr Album schreiben kann sind daher 1, 2 und 3.

Die richtige Antwort ist also A.

I-10: In einem bestimmten Bruch mit positivem Zähler und positivem Nenner wird der Nenner um 20% verkleinert. Wie muss der Zähler geändert werden damit der neue Bruch doppelt so groß wie der ursprüngliche Bruch wird?

(A) um 20% vergrößert (B) um 20% verkleinert (C) um 40% vergrößert
(D) um 40% verkleinert (E) um 60% vergrößert

Lösung: Wir nehmen an, der ursprüngliche Bruch wäre $\frac{a}{b}$. Da der Nenner um 20% verkleinert wird, ist der neue Nenner $0,8 \cdot b$. Wir nehmen an, der neue Zähler wäre $x \cdot a$ mit unbekanntem x. Dann gilt

$$\frac{x \cdot a}{0,8 \cdot b} = 2 \cdot \frac{a}{b} \iff \frac{x}{0,8} = 2 \iff x = 2 \cdot 0,8 = 1,6.$$

Der Zähler wird daher um 60% vergrößert und die richtige Antwort ist also E.