Steirischer Unterstufenwettbewerb 2022
Mittwoch, 20.4.2022 — Teil II
Lösungen und Punkteschlüssel

II-01: Die Jahreszahl 2022 kann man schreiben als

$$(a-1)\cdot a\cdot(110\cdot a+x),$$

wobei a und x ungerade natürliche Zahlen sind. Wie groß ist der Wert von x?

Lösung A: Die Jahreszahl 2022 hat die Primzerlegung

$$2022 = 2\cdot 3\cdot 337.$$

Da a ein ungerader Teiler von 2022 ist, kann a nur einen der Werte $1, 3, 337$ und $3\cdot 337 = 1011$ annehmen. Durch Einsetzen bestätigen wir, dass nur der Wert $a = 3$ in Frage kommt (für $a = 1$ ist der Wert des Produkts gleich 0 und für die übrigen beiden Werte ist schon das Produkt $(a-1)\cdot a$ deutlich größer als 2022), und es gilt dann

$$2022 = (3-1)\cdot 3\cdot(110\cdot 3+x) = 2\cdot 3\cdot(330+x) = 2\cdot 3\cdot 337,$$

womit wir $x = 7$ erhalten.

Punkte:

1 Punkt: nur Angabe von $x = 7$, ohne Begründung.

2 Punkte: Angabe der Primzerlegung $2022 = 2\cdot 3\cdot 337$ ohne Angabe von $x = 7$.

3 Punkte: Angabe von $2022 = 2\cdot 3\cdot 337$ und $x = 7$, ohne Argument, warum keine anderen Lösungen möglich sind.

4 Punkte: prinzipiell richtige vollständige Lösung mit kleinem Rechenfehler, der zu einer falschen Antwort führt.

5 Punkte: vollständige Lösung.

II-02: In der Multiplikationsaufgabe

$$(111\star)\cdot(1\star) = 1\star\star\star 1$$

wird eine vierziffrige Zahl mit einer zweiziffrigen multipliziert, was ein fünfziffriges Ergebnis liefert. Die Sterne stehen jeweils für Ziffern ungleich 1. Es gibt zwei mögliche Werte für die Summe der Ziffern, die von den Sternen repräsentiert werden. Bestimme diese beiden Summen.

Lösung: Wir beobachten, dass die Einerziffer des Produkts 1 ist, während keine der beiden Einerziffern der Ausgangszahlen 1 ist. Die Einerziffer 1 kann sich unter diesen Umständen nur aus den Multiplikationen $3\cdot 7 = 21$ oder $9\cdot 9 = 81$ ergeben.

Wegen $1119\cdot 19 = 21261$ kommt 9 nicht in Frage, da die Leitziffer des Produkts 1 sein muss. Es bleiben also die beiden Möglichkeiten

$$1113 \cdot 17 = 18921 \quad \text{und} \quad 1117 \cdot 13 = 14521,$$

und die geforderten Summen sind somit

$$3 + 7 + 8 + 9 + 2 = 29 \quad \text{und} \quad 7 + 3 + 4 + 5 + 2 = 21.$$

Punkte:

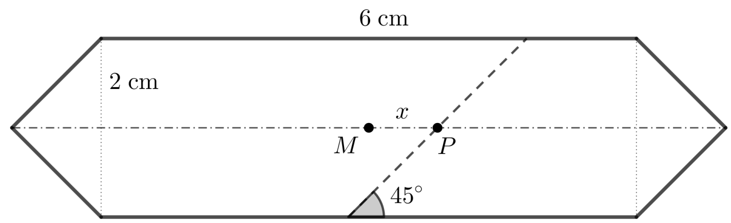
1 Punkt: Angabe einer Lösung durch Probieren, ohne Argument

2 Punkte: Angabe beider Lösungen durch Probieren, ohne Argument

+2 Punkte (additiv): Erkenntnis, dass letzte Ziffern $3 \cdot 7$ oder $9 \cdot 9$ sein müssen

+1 Punkt (additiv): Abschluss des Arguments inklusive Ausschluss des Falls $9 \cdot 9$

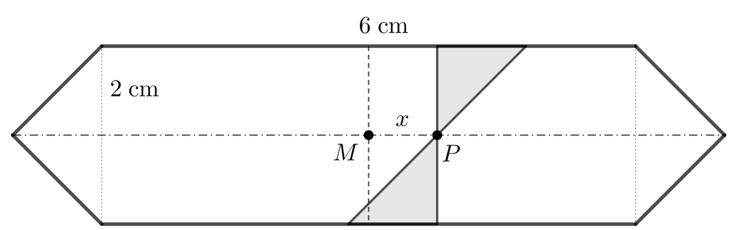
II-03: Ein Papierstreifen besteht, wie im Bild zu sehen, aus einem Rechteck mit den Seitenlängen 2 cm × 6 cm und zwei angefügten gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecken. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Streifens.



Der Streifen wird mit einem geraden Schnitt in zwei Teile geschnitten. Der Schnitt geht durch den Punkt P und schließt mit dem Rand des Streifens den Winkel 45° ein. Das resultierende größere Stück des Streifens hat einen Flächeninhalt der 1,5-Mal so groß ist wie der Flächeninhalt des kleineren Stücks.

Berechne den Abstand x von P zu M in mm.

Lösung: Zuerst bemerken wir, dass die Gesamtfläche aus dem Rechteck und den beiden Randdreiecken besteht. Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$, und der gesamte Flächeninhalt des Streifens beträgt daher $2 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 14$ cm^2.



Wie in der Figur zu sehen ist, ergänzen wir senkrechte Linien durch M und P. Da die beiden grauen Dreiecke kongruent sind, haben die Teile des Streifens, die durch die senkrechte Strecke durch P getrennt sind dieselben Flächeninhalte wie die, die durch den schrägen Schnitt entstanden sind. Der größere Teil des Streifens links dieser senkrechten Strecke hat den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2} \cdot 14 + 2 \cdot x = 7 + 2x,$$

da er aus dem halben Streifen besteht, ergänzt durch ein kleines Rechteck mit den Maßen 2 cm $\times$ x cm. Der kleinere Teil hat dann einen Flächeninhalt von

$$\frac{1}{2} \cdot 14 - 2 \cdot x = 7 - 2x.$$

Aufgrund der Angabe wissen wir, dass

$$7 + 2 \cdot x = 1,5 \cdot (7 - 2 \cdot x)$$

gilt. Dies ergibt

$$7 + 2x = 10,5 - 3x \iff 5x = 3,5 \iff x = 0,7.$$

Wir erhalten also $x = 0,7$ cm $= 7$ mm. $\square$

Bemerkung: Man kann auch die Flächeninhalte der beiden Streifenteile durch x ausdrücken, indem man beobachtet, dass sie jeweils aus einem Parallelogramm und einem Trapez mit den Parallelseitenlängen $4 \pm x$ cm bzw. $3 \pm x$ cm und der Höhe 1 cm zusammengesetzt sind.

Punkte:

3 Punkte: richtige Gleichung, die zur Lösung führt

+2 Punkte (additiv): Berechnung der Lösung aus der Gleichung

Teilpunkte sind für beide Teile möglich, wenn nur Teile richtig sind. Volle 5 Punkte nur, wenn auch die richtige Antwort explizit in mm angegeben ist, sonst maximal 4 Punkte. 1 Punkt, wenn Fläche des Streifens richtig berechnet wird und sonst keine Punkte zu vergeben sind.

II-04: Die Eckpunkte $ABCD$ eines Rechtecks liegen alle auf einem Kreis k. Im Rechteck gilt $BC =$ 6 cm und $\angle ACB = 30°$. Ferner liegt ein weiterer Punkt E auf k so, dass DE parallel zu AC liegt. Berechne die Länge der Strecke DE.

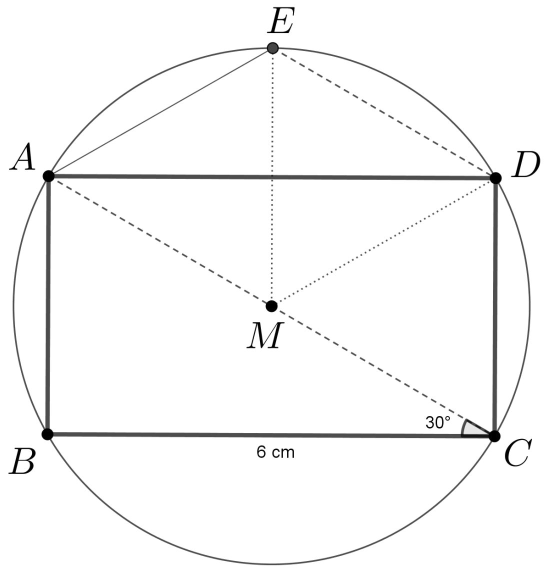
Lösung: Wegen $DE \| AC$ ist das Viereck $ACDE$, dessen Eckpunkte alle auf einem gemeinsamen Kreis liegen, ein gleichschenkeliges Trapez mit $\angle EDC = 180° - \angle DCA = 120°$.

Es sei M der Mittelpunkt von k. Da der Umkreis eines Rechtecks im Schnittpunkt seiner Diagonalen liegt, ist M auch der Mittelpunkt von AC. Das Dreieck ABC ist rechtwinkelig mit $\angle ACB = 30°$. Somit gilt

$$AC = BC \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm},$$

und daher $MA = MB = MC = MD = ME = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm.

Das Dreieck MCD ist wegen $\angle DCM = 90° - \angle ACB = 60°$ und $MC = MD$ gleichseitig, und es gilt daher $CD = MC = MD$ und $\angle MDC = 60°$. Wegen $\angle EDM = \angle EDC - \angle MDC = 120° - 60° = 60°$ und $MD = ME$ ist auch das Dreieck MDE gleichseitig, und es folgt somit $DE = MD = 2\sqrt{3}$ cm.



□

Punkte:

1 Punkt: genügend exakte Zeichnung, in der alle drei Seiten mindestens eines gleichseitigen Teildreiecks eingezeichnet sind

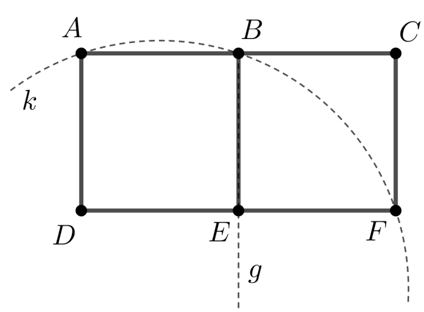
+1 Punkt (additiv): explizite Erwähnung einer gleichseitigen Dreiecks

+1 Punkt (additiv): Begründung des gleichseitigen Dreiecks

+2 Punkte (additiv): Berechnung der Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks; Vervollständigung des Arguments

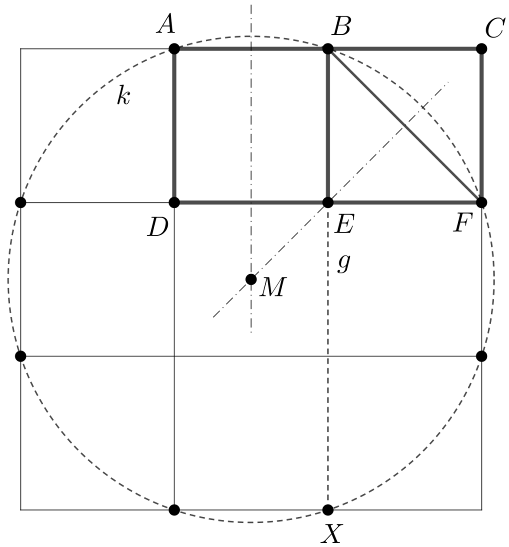
Wenn das Argument und die Rechnung vollständig sind, können 5 Punkte auch vergeben werden, wenn die Zeichnung nicht genau ist. Wenn ein Argument unvollständig ist, und die Zeichnung nicht genau, kann der erste Punkt nicht vergeben werden, aber einzelne spätere Punkte eventuell schon.

II-05: Die beiden Quadrate $ABED$ und $BCFE$ haben, wie in der Abbildung zu sehen, eine gemeinsame Seite BE mit der Länge 1.



Der Kreis k geht durch die Punkte A, B und F und die Gerade g geht durch die beiden Punkte B und E. Diese Gerade g schneidet k neben B ein zweites Mal im Punkt X. Berechne den Abstand von X zu B.

Lösung: Wir ergänzen, wie in der Abbildung zu sehen, die beiden gegebenen Quadrate zu einem 3×3 Raster. Da der Mittelpunkt M von K der Schnittpunkt der Streckensymmetralen von AB und BF ist und diese beiden Geraden Symmetrieachsen des Rasters sind, geht K aus Symmetriegründen durch alle acht auf den Seiten liegenden Rasterpunkten. Darunter befindet sich auch der Punkt X, und der Abstand von X zu B ist daher drei Mal so groß wie der Abstand von E zu B, also 3.



□

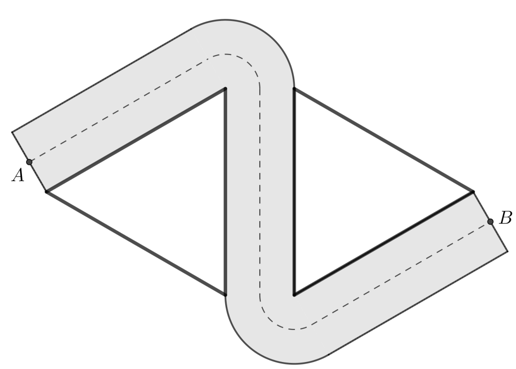
Punkte:

1 Punkt: Zeichnung in der ein geeignetes Raster angedeutet ist

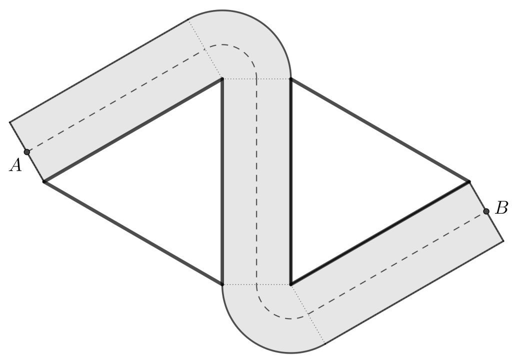
+1 Punkt (additiv): Behauptung, dass die Antwort 3 ist, ohne weitere Begründung

+3 Punkte (additiv): vollständige Begründung (auch Teilpunkte möglich für unvollständige Begründung, z.B. ohne die Symmetrie an der Diagonalen zu erwähnen)

II-06: In der Millionenstadt New Shangkyo wird ein Wolkenkratzer mit zwei Türmen gebaut. Jeder Turm hat ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 60 m als Grundriss. Eine 20 m breite Straße soll, wie im Bild zu sehen, zwischen den Türmen gebaut werden. Die Straßenfläche besteht aus drei Rechtecken und zwei Kreissektoren und zwischen den Punkten A und B soll genau in der Mitte der Straße eine Leitschiene errichtet werden. Die Leitschiene ist im Bild durch eine strichlierte Linie angedeutet. Wie lang ist die Leitschiene?



Lösung: In folgendem Bild ist die Aufteilung der Straße in Rechtecke und Kreissektoren angedeutet.



Die Mittellinien der Rechtecke haben dieselbe Länge wie die Dreiecksseiten, also jeweils 60 m. Die Mittelkurven der Kreissektoren sind Kreisbögen mit dem Radius $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ m. Der Zentriwinkel dieser Bögen ist jeweils gleich $360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$, also genau ein Drittel des vollen Winkels. Jedes dieser Kreisbögen hat also die Länge $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 10 \cdot \pi = \frac{20}{3} \cdot \pi$. Die Gesamtlänge der Leitschiene beträgt somit

$$3 \cdot 60 + 2 \cdot \frac{20}{3} \cdot \pi = 180 + \frac{40}{3} \cdot \pi \text{ m.}$$

□

Punkte:

1 Punkt: Aufteilung in Strecken und Kreisbögen angedeutet (in Zeichnung oder als Text beschrieben)

+1 Punkt (additiv): Feststellung, dass Strecken gleich lang sind, wie Hausseiten (oder explizite Angabe der Länge 60 m für die geraden Teile der Leitschiene)

+2 Punkte (additiv): Berechnung der Kreisbögen (auch 1 Punkt möglich, wenn teilweise vorhanden, aber nicht vollständig oder mit Rechenfehler)

+1 Punkt (additiv): Zusammenfassung und Angabe der Gesamtlänge (kann auch vergeben werden, wenn vorher ein Rechenfehler gemacht wurde, und sich Folgefehler ergeben, aber sonst richtig weiter gerechnet wurde)

II-07: a) Die Summe von vier (nicht notwendigerweise verschiedenen) positiven ganzen Zahlen ist 10. Die Summe ihrer Quadrate ist 36. Bestimme die vier Zahlen.

b) Die Summe von drei (nicht notwendigerweise verschiedenen) positiven ganzen Zahlen ist 10. Die Summe ihrer Quadrate ist 36. Bestimme die drei Zahlen.

c) Die Summe von zwei (nicht notwendigerweise verschiedenen) positiven ganzen Zahlen ist 10. Die Summe ihrer Quadrate soll ebenfalls 36 sein. Begründe, warum dies nicht möglich ist.

Lösung: a) Es gilt

$$5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 = 25 + 9 + 1 + 1 = 36.$$

Die vier Zahlen sind also $5, 3, 1$ und 1.

b) Es gilt

$$4^2 + 4^2 + 2^2 = 16 + 16 + 4 = 36.$$

Die drei Zahlen sind also $4, 4$ und 2.

c) Ist die Summe von zwei positiven ganzen Zahlen gleich 10, so sind entweder beide gleich 5 oder die größere unter ihnen ist mindestens 6. Sind beide Zahlen gleich 5, so gilt

$$5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \neq 36.$$

Ist eine der beiden Zahlen mindestens gleich 6, so ist ihr Quadrat mindestens 36, und die Summe der beiden Quadrate daher sicher größer als 36. Die Zahl 36 kann daher sicher nicht die Summe der Quadrate dieser beiden Zahlen sein. $\square$

Punkte:

2 Punkte: Angabe der Lösung von a) oder b), aber nicht beide

3 Punkte: Angabe der Lösungen von a) und b)

+2 Punkte (additiv): vollständige Begründung für c) (1 Punkt ist möglich, wenn ein sinnvolles, aber nicht vollständiges, Teilargument angegeben wird)

Hinweis: In allen Aufgaben sind Punkte analog gewichtet zu vergeben, wenn andere (zielführende und richtige) Lösungsmethoden verwendet werden.