

Österreichische Mathematikolympiade
Steirischer Unterstufenwettbewerb 2018
(Teil II, Arbeitszeit 105 Minuten)

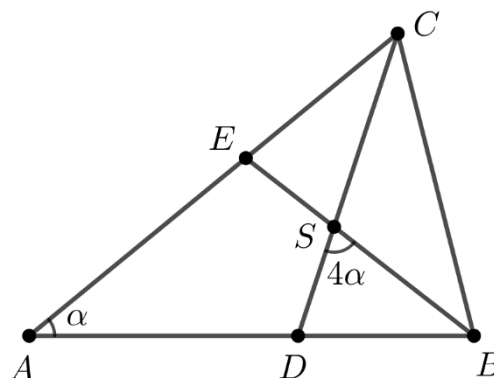


Schreibe die Lösungen für jedes Beispiel auf ein eigenes Reinschriftblatt (Beschriftung mit Namen!). Für jedes vollständig gelöste Beispiel gibt es 5 Punkte. Wenn du ein Beispiel nicht bearbeitest, gib trotzdem ein leeres Blatt (beschriftet mit Beispielnummer und deinem Namen) ab.

Vergiss nicht darauf, deine Lösungswege möglichst sorgfältig aufzuschreiben / zu begründen (keine Kopfrechnungen!).

1) Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen ist 6 und ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist 210. Ermittle alle Zahlenpaare mit diesen genannten Eigenschaften und begründe warum es keine weiteren derartigen Paare geben kann.

2) In einem Dreieck ABC ist CD die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle ACB$ und BE die Winkelsymmetralen von $\sphericalangle ABC$. Ihr Schnittpunkt sei S . Wie in der Figur zu sehen, gilt $\sphericalangle CAB = \alpha$ und $\sphericalangle BSD = 4\alpha$. Zeige, dass der Wert von α eindeutig bestimmt ist und ermittle diesen Wert von α . (Figur nicht maßstabgetreu)



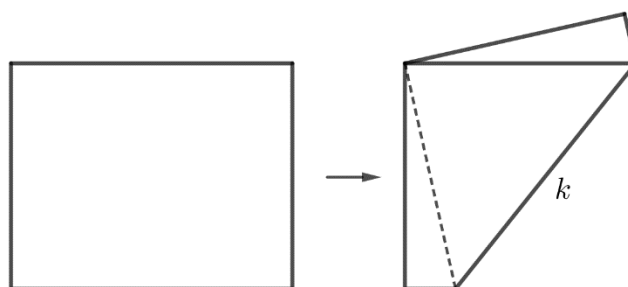
3) Franz war einkaufen. Im ersten Geschäft hat er ein Achtel seines Geldes ausgegeben. Im zweiten Geschäft hat er um 50 Euro weniger als im ersten Geschäft ausgegeben. Im dritten Geschäft hat er doppelt so viel wie im zweiten ausgegeben. Im letzten Geschäft hat er 300 Euro ausgegeben. Am Schluss blieben ihm um 150 Euro mehr übrig als er im ersten Geschäft ausgegeben hat.

Wie viel Geld hatte Franz zu Beginn seines Einkaufstags in der Geldbörse?

4) Auf den 18 Memorykarten von Lyanna kommen 9 verschiedene Bilder vor; jedes Bild auf zwei Karten. Sie legt die 19 Karten verdeckt so auf, dass sie nicht weiß welche Karte wo liegt. In jedem Zug wählt sie zuerst eine Karte und deckt diese auf, dann entscheidet sie sich für eine zweite Karte und deckt auch diese auf. Wenn die beiden Karten dasselbe Bild zeigen, bleiben sie offen liegen, andernfalls werden sie wieder verdeckt. Wir sagen, sie hat bei der Kartenauswahl „Glück“, wenn die zweite gewählte Karte in einem Zug dasselbe Bild wie die erste hat, sie aber diese Karte in keinem vorherigen Zug angesehen hatte.

Lyanna braucht genau 13 Züge, bis alle Karten offen liegen. Wie oft hatte sie dabei mindestens „Glück“? (Hinweis: Wir zählen es auch dann als „Glück“, wenn aus anderen Gründen bereits bekannt ist, was unter der zweiten Karte ist, beispielsweise bei den letzten beiden Karten.)

5) Ein rechteckiges Blatt Papier hat die Maße 8 cm x 6 cm. Faltet man das Blatt so, dass zwei gegenüberliegende Ecken wie im Bild zu sehen zusammentreffen, entsteht eine Faltkante k , die im rechten Winkel zur Diagonale des Rechtecks liegt. Wie lang ist diese Faltkante?



6) In einer Urne befinden sich 100 Kugeln, die sich nur durch ihre Farben unterscheiden. Davon sind 2 grün, 16 weiß, 26 schwarz, 28 rot und 28 blau. Ulrike soll mit verbundenen Augen Kugeln aus der Urne herausnehmen.

Wie viele Kugeln muss sie mindestens aus der Urne nehmen, damit sich unter den entnommenen Kugeln sicher neun mit derselben Farbe befinden? Begründe, warum dies mit weniger Kugeln nicht sicher der Fall sein muss.

7) Verkleinert man die Hunderterziffer einer dreiziffrigen Quadratzahl x um 2 und gleichzeitig auch ihre Einerziffer um 5, erhält man eine dreiziffrige Quadratzahl y .

Bestimme die beiden Zahlen x und y . Begründe, warum es nur eine Lösung zu dieser Aufgabe geben kann.