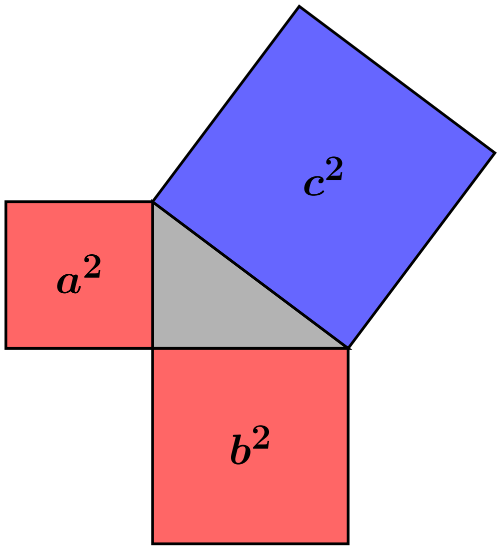
51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 20. September 2019

Der Satz von Pythagoras

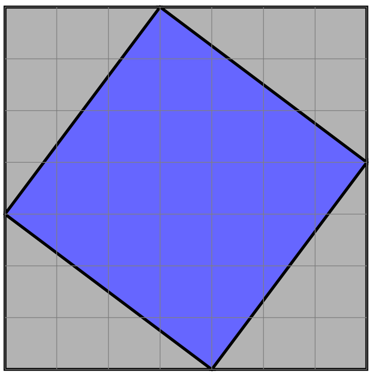
Wir nennen ein Dreieck *rechtwinklig*, wenn es einen Innenwinkel von 90° hat. Die beiden Seiten, die an den Winkel anliegen, nennen wir *Katheten*, die gegenüberliegende Seite *Hypotenuse*.

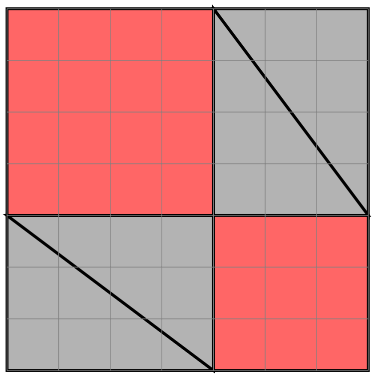


Satz 0.1. *In einem rechtwinkligen Dreieck mit Kathetenlängen a und b und Hypotenusenlänge c gilt*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Geometrisch gesehen: Zwei Quadrate mit den Seitenlängen a und b haben gemeinsam denselben Flächeninhalt wie ein Quadrat mit Seitenlänge c.





Beweis: Der Beweis funktioniert fast ohne Worte. Wie in den Abbildungen gezeigt, können wir ein Quadrat mit Seitenlänge $a + b$ auf zwei verschiedene Arten in kleinere Figuren unterteilen: Unterteilen wir jede Seite des Quadrats im Verhältnis $a : b$, so bilden die vier Teilungspunkte ein Quadrat mit Seitenlänge c. brig bleiben vier Kopien des rechtwinkligen Dreiecks. Andererseits können wir das $a+b$-Quadrat in zwei $a\times b$-Rechtecke, ein $a\times a$-Quadrat und ein $b \times b$-Quadrat unterteilen. Die zwei Rechtecke können weiter in insgesamt vier Kopien des rechtwinkligen Dreiecks unterteilt werden. Bezeichnen wir den Flächeninhalt des Dreiecks mit Δ, so erhalten wir die Gleichung

$$4 \cdot \Delta + a^2 + b^2 = (a + b)^2 = 4 \cdot \Delta + c^2.$$

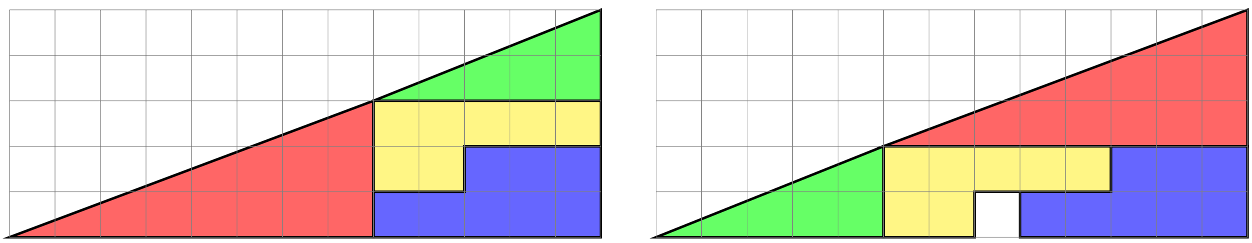
Zieht man $4 \cdot \Delta$ nun von beiden Seiten ab, bleibt die gewünschte Identität $a^2 + b^2 = c^2$ übrig.

□

Annahmen im Beweis

Dieser Beweis für den Satz von Pythagoras kommt mit erstaunlich wenigen Annahmen aus. Eine davon ist, dass sich der Flächeninhalt von Figuren nicht ändert, wenn man sie rotiert oder verschiebt. Die andere wichtige Annahme ist, dass der Flächeninhalt einer Figur, die aus mehreren Teilen zusammengesetzt ist, die Summe der Flächeninhalte der Teile ist. Beide Annahmen sind so intuitiv, dass wir sie üblicherweise nicht überprüfen, sondern einfach voraussetzen.

Aber stimmt die zweite Annahme eigentlich? Betrachtet man die zwei Bilder unten, so sieht man, dass man die vier Bausteine (rot, blau, gelb, grün) zu einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 13×5 zusammensetzen kann. Andererseits kann man die Teile auch so aneinanderlegen, dass sie ein 13×5 Dreieck bilden, bei dem aber ein 1×1-Quadrat fehlt! Diese Figur sollte eigentlich einen geringeren Flächeninhalt haben. Stimmt die Annahme (und damit möglicherweise der Satz von Pyhtagoras) nicht, oder wurden wir überlistet?[1]



Beispiele

Beispiel 1 (Parallelogrammregel)**.** *Ein Parallelogramm $ABCD$ ist ein Viereck, sodass gegenüberliegende Seiten parallel sind. Man zeige, dass die Summe der Quadrate über den vier Seiten gleich der Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist.*

Beispiel 2. *Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ und ein Punkt P. Man zeige, dass die Summe der Quadrate der Abstände von P zu A und zu C gleich der Summe der Quadrate der Abstände von P zu B und D ist, also dass $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$.*

Beispiel 3. *Könnte man, ausgerüstet mit einem Geodreieck, eine Strecke der Länge $\sqrt{2019}cm$ konstruieren? Geht das für jede Wurzel einer natürliche Zahl $\sqrt{n}$, solange ein sehr langes Lineal und genug Papier vorhanden ist?*

[1] Dieses Rätsel wurde laut Martin Gardner, einem großen Sammler mathematischer Rätsel, von einem New Yorker Magier namens Paul Curry erfunden. (Gardner, Martin. Mathematics, Magic and Mystery. New York, Dover Publications, 1956)