51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 8. November 2019

Beispiel 1. *Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln gleich sind, sowie in einer entsprechenden Länge (z.B. eine Seitenlänge, eine Höhe, eine Schwerlinie, ...), dann sind sie kongruent.*

Beispiel 2. *Warum folgt aus dem Seiten-Seiten-Seiten-Satz, dass ein Dreieck, in dem $a = b$ gilt, auch gleiche Winkel in A und B haben muss?*

Beispiel 3 (Satz von Thales)**.** *Es sei AB ein Durchmesser eines Kreises, und C ein weiterer Punkt auf diesem Kreis. Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig mit rechtem Winkel in C ist.*

Beispiel 4 (Höhen- und Kathetensatz)**.** *Es sei ABC ein Dreieck mit rechtem Winkel in C. Wir bezeichnen den Fußpunkt der Höhe durch C auf der Seite c mit D. Die Streckenlängen AD und DB bezeichnen wir mit p und q, und die Länge der Höhe CD mit h. Zeige, dass die Formeln $p \cdot q = h^2$, $p \cdot c = b^2$ und $q \cdot c = a^2$ gelten. Findest du einen alternativen Beweis für den Satz von Pythagoras, der nur diese Formeln verwendet?*

Beispiel 5. *Gibt es eine unendliche Menge von Strecken $\{l_1, l_2, l_3, \dots\}$, sodass keine drei davon die Seitenlängen eines Dreiecks sein können?*

Beispiel 6. *Gegeben sei ein Blatt Papier im A4-Format. Kann ich nur durch geschicktes Falten das Blatt in drei (theoretisch) exakt gleich große Rechtecke unterteilen? Kann ich es in eine beliebige Anzahl gleich großer Rechtecke unterteilen?*

Beispiel 7. *Wir betrachten wieder ein Blatt im A4-Format. Es ist festgelegt, dass ein A0-Papier einen Flächeninhalt von 1m^2 hat*[1]*. Halbiert man das A0-Papier parallel zur kurzen Seite, erhält man zwei A1-Papiere. Halbiert man diese wieder, erhält man A2-Papiere, dann A3, dann A4 und so weiter. Außerdem haben alle Papiere des A-Formats dieselben Seitenverhältnisse. Welche Seitenlängen hat ein A4-Papier? (Der Taschenrechner ist in dieser Aufgabe erlaubt!)*

Beispiel 8. *Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Ein gleichseitiges Dreieck über der Seite BC, das nach außen zeigt, habe P als dritten Eckpunkt, und ein gleichseitiges Dreieck über CD, das nach innen zeigt, habe Q als dritten Eckpunkt. Zeige, dass A,P und Q auf einer gemeinsamen Geraden liegen.*

Beispiel 9. *Wir betrachten ein regelmäßiges Fünfeck mit Seitenlänge a. Es hat fünf Diagonalen, die alle gleich lang sind. Wir bezeichnen diese Länge mit b. Zeige, dass $b : a = (a + b) : b$. Können wir uns $b : a$ ausrechnen? Diese Zahl ist der berühmte* goldene Schnitt*.*

Beispiel 10. *Die Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck begrenzen selbst wieder ein regelmäßiges Fünfeck. Was ist das Seitenverhältnis der beiden Fünfecke?*

---

[1] Das kann man z.B. auf `https://www.din-formate.de/` nachlesen.