51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 29. November 2019

1. (Wiederholung) Teile die gegebene Strecke AB im Verhältnis 4:3!

2. (a) Kann die Zahl
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2019 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2020$$
die letzte Ziffer 9 haben?

   (b) Wie viele Nullen hat die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2019 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2020$ am Ende?

3. Es seien $a, b \in \mathbb{N}$, a, $b > 2020$, und $a + b = 20192019$.
Kann die Zahl $(a + 2020) \cdot (b - 2020)$ auf den Ziffern 2019 enden?

4. Sei $\overline{abc}$ die Dezimaldarstellung der natürlichen Zahl $n = 100a + 10b + c$.
Beweise, dass die Zahl $\overline{abc} - \overline{acb}$ durch 9 teilbar ist.

5. Es seien x, y, z ganze Zahlen mit $x^3 + y^3 = z^3$.
Beweise, dass mindestens eine dieser Zahlen durch 3 teibar ist.

6. Sei $b = a - 1$. Beweise, dass
$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \cdot \dots \cdot (a^{128} + b^{128}) = a^{256} - b^{256}.$$

7. Berechne:
$$101 \cdot 10001 \cdot 100000001 \cdot \dots \cdot \underbrace{100\ldots001}_{256+1 \text{ Ziffern}}$$

8. Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweise, dass
$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}.$$

9. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Beweise, dass
$$\frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}.$$

10. Beweise, dass
$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$
[1]

Literatur

[1] I. L. Babinskaja. *Aufgaben für matehmatische Olymiaden.* Nauka, 1975. vergriffen.