



MATHEMATIK

macht

FREU(N)DE

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

10. und 17. Jänner 2020

1. (Wiederholung)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweise, dass

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Beweise, dass

$$\frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}.$$

(c) ([2]) Beweise, dass

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

- Wie viele Zahlen von 1 bis 1000 enthalten nicht die Ziffer 7? [1]
- Eine Zahl besteht aus sieben verschiedenen Ziffern und ist durch jede dieser Ziffern teilbar. Welche drei Ziffern kann diese Zahl nicht enthalten? [1]
- Kann eine Zahl der Gestalt $444 \dots 443$ durch 13 teilbar sein? [1]
- Ist es möglich die Menge der Zahlen $A = \{1, 2, 3, \dots, 33\}$ so in 11 Teilmengen mit je drei Elementen zu unterteilen, dass in jeder dieser 11 Teilmengen ein Element die Summe der beiden anderen ist? [1]
- Zu jeder Seite eines Quadrats wird mit roter Farbe eine positive ganze Zahl geschrieben. Zu jedem Eckpunkt wird mit grüner Farbe das Produkt der beiden roten Zahlen geschrieben, die bei den angrenzenden Seiten stehen. Die Summe der grünen Zahlen sei 4. Welche Werte sind für die Summe der roten Zahlen möglich? [1]
- Von einem Dreieck kennt man alle Summen von je zwei Seitenlängen: $a + b = 15$ m, $a + c = 20$ m, $b + c = 21$ m. Wie lang ist die Seite a ? [1]
- Herr Anton kauft Markenpackungen zum Stückpreis von 40 Euro, 10 Euro und 1 Euro. Er bezahlt 259 Euro für 100 Packungen. Wie viele Markenpackungen der billigsten Sorte hat er gekauft? [1]

Literatur

- [1] Mathematik macht Freu(n)de, Vorbereitungskurs (A). https://mmf.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_mathematikmachtfreunde/Olympiade/Anf_1819/A_14.Sept.18.pdf. Aufgabenblatt vom 14. Sept. 2018, (aufgerufen am 13.1.2020).
- [2] I. L. Babinskaja. *Aufgaben für mathematische Olympiaden*. Nauka, 1975. vergriffen.