51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufenkurs - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 31. Jänner 2020

Waagen und Münzen

1. Du hast 80 Münzen. Davon haben 79 das gleiche Gewicht, eine ist anders. Du hast eine Balkenwaage.

   Finde eine Methode, die nach nur vier Wägungen die falsche Münze findet. Ist es auch möglich die Münze mit weniger als vier Wägungen zu finden? [2]

2. Auf einem Tisch stehen eine Balkenwaage mit zwei Waagschalen und ein Satz Wägestücke. Dieser besteht aus je einem Wägestück der Masse 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g, 32 g, 64 g, 128 g, 256 g, 512 g, 1 024 g und 2 048 g. Auf die linke Waagschale wird ein Eisenblock mit einer Masse von 1 111 g gelegt. Es wird ein geeignetes Wägestück derart ausgewählt, dass durch das geeignete Verteilen dieses Wägestückes und aller leichteren aus dem Wägesatz auf die beiden Waagschalen Gleichgewicht hergestellt wird. Begründe, dass die Wägestücke wie beschrieben auf die beiden Waagschalen aufgeteilt werden können und dass dann das 16 g-Stück unabhängig von der konkreten Aufteilung stets in der gleichen Waagschale liegt.

   Hinweis: Bei einer Balkenwaage mit zwei Waagschalen herrscht genau dann Gleichgewicht, wenn auf beiden Waagschalen die gleiche Masse liegt.[1, Aufg. 580814]

3. (Russland 2010) Von 100 Münzen sind genau 4 falsch. Alle echten Münzen sind gleich schwer, die vier falschen Münzen sind auch alle gleich schwer und alle leichter als die echten Münzen. Wie kann man mit nur zwei Wägungen eine richtige Münze finden?

4. Ein Händler auf einem fernöstlichen Basar hat einen Beutel mit 9 kg Nüssen. Jede Nuss wiegt zwei Gramm. Ein Kunde möchte 2 kg Nüsse kaufen. Natürlich könnte der Händler die Nüsse auszählen; das ist ihm aber zu mühsam. Also will er die Nussmenge auswiegen. Dazu verwendet er eine Balkenwaage. Allerdings hat er an Gewichtsstücken nur noch ein 200g-Stück und ein 50g-Stück.

   a) Zeige, wie er diese gewünschte Menge mit vier Wägungen abwiegen kann!
   b) Zeige, wie er diese gewünschte Menge sogar mit nur drei Wägungen abwiegen kann! [1, Aufg. 400514]

5. (Russland 1991) Es gibt sechs Münzen mit den Gewichten $1, 2, 3, 4, 5, 6$, die mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet sind, aber sonst äußerlich nicht unterscheidbar sind. Wie kann man mit zweimaliger Messung mit einer Balkenwaage feststellen, ob die Münzen richtig (entsprechend der Gewichte) beschriftet sind?

6. Von 9 Münzen haben 8 das gleiche Gewicht, eine ist gefälscht und deshalb leichter als die anderen. Um die gefälschte Münze zu finden, stehen 3 Waagen mit je 2 Schalen zur Verfügung. Eine der Waagen ist defekt, man weißaber nicht, welche, die anderen beiden arbeiten korrekt. Die defekte Waage zeigt bei jeder Wägung ein willkürliches Ergebnis.

    a) Man gebe ein Verfahren an, mit dem die gefälschte Münze durch 5 Wägungen sicher bestimmt werden kann.

    b) Man gebe ein Verfahren an, mit dem die gefälschte Münze durch 4 Wägungen sicher bestimmt werden kann.

       Hinweis: Als Ergebnis einer Wägung auf einer solchen Schalenwaage liegt stets eines der drei unterscheidbaren Ergebnisse „L“ (die auf der linken Schale liegenden Gegenstände sind schwerer als die auf der rechten Schale liegenden), „R“ (die Gegenstände rechts sind schwerer) oder „M“ (beide Seiten sind gleich schwer) vor. Weitergehende Anzeigen gibt es nicht. [1, Aufg. 531245]

7. Von 14 Münzen ist eine gefälscht.

    a) Die nicht-gefälschten Münzen sind alle gleich schwer, die gefälschte ist leichter. Von einer der vierzehn Münzen wissen wir, dass sie nicht gefälscht ist.

       Ist es möglich die falsche Münze mit 3 Messungen mit einer Balkenwaage zu finden?

    b) Nun ist alles gleich wie oben, aber jetzt wissen wir nicht ob die falsche Münze leichter oder schwerer ist. (Sie ist aber sicher eines von beiden.) Ist es immer noch möglich die falsche Münze mit drei Messungen zu finden? (Achtung schwer)

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Matheamtik-Olympiade. `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv`. (aufgerufen am 3.2.2020).

[2] Yaglom I. M. D. O. Shklarsky D. O., N. N. Chentzov N. N. *The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*. Dover Publications, 1993.