51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 20. März 2020

Symmetrische Gleichungen und Polynomgleichungen

Was hat die Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$ mit dem Gleichungssystem $x + y = 3$, $x \cdot y = 2$ zu tun? Die erste Gleichung ist erfüllt, wenn $x = 1$ oder $x = 2$ eintritt. Die zweite Gleichung ist dann erfüllt, wenn $(x, y) = (1, 2)$ oder $(x, y) = (2, 1)$ eintritt. Diese Ähnlichkeit in der Lösungsmenge der Gleichungen ist kein Zufall! Es stellt sich heraus, dass man den Ausdruck $x^2 - 3x + 2$ auch als $(x - 1)(x - 2)$ schreiben kann:

$$(x-1)(x-2) = x \cdot (x-2) - 1 \cdot (x-2) = x \cdot x - 2 \cdot x - 1 \cdot x + 2 \cdot 1 = x^2 - (2+1)x + 2.$$

Links erkennt man, dass der Audruck nur Null wird, wenn $x = 1$ oder $x = 2$ gilt, weil ja ein Produkt von zwei Zahlen nur dann Null werden kann, wenn mindestens eine der Zahlen Null ist!
Wenn man aber (so wie wir vorher) einen solchen Ausdruck ausmultipliziert, dann steht vor dem x immer die Summe der beiden Lösungen, und der Term ohne x (der *konstante* Term) ist das Produkt der Lösungen.
Wenn man sich länger mit Ausdrücken wie $x^2 - 3x + 2$, den sogenannten *Polynomen*, beschäftigt, kann man beweisen, dass sie immer auf eine eindeutige Art und Weise in Faktoren wie $x-2$ und $x-1$ zerfallen, die sogenannten *Linearfaktoren*. Das ist genau wie bei den natürlichen Zahlen und den Primzahlen, und der Beweis funktioniert auch genau gleich. Der Satz, den man damit formulieren kann, heißt Satz von Vieta, nach dem französchischen Mathematiker Françoise Viète.

Satz 1. *Eine Polynomgleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} - \cdots + a_0 = 0$ hat maximal n Lösungen. Wenn sie genau n Lösungen hat, die wir hier mit $l_1, \ldots, l_n$ bezeichnen, dann gilt*

$$\begin{aligned} a_0 &= (-l_1) \cdot (-l_2) \cdot (-l_3) \cdot \ldots \cdot (-l_n) = (-1)^n l_1 l_2 l_3 \ldots l_n \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= l_1 l_2 + l_1 l_3 + \ldots + l_2 l_3 + \ldots + l_{n-1} l_n \\ a_{n-1} &= -l_1 - l_2 - l_3 - \ldots - l_n, \end{aligned}$$

und wir können das Polynom auch als $a_n(x - l_1)(x - l_2)(x - l_3) \ldots (x - l_n)$ schreiben.

Um den Satz anwenden zu können, muss man aber die Lösungen der Polynomgleichung *kennen*, oder zumindest etwas über sie wissen.
Dabei hilft ein weiterer alter Satz, der oft als das Lemma von Gauss bezeichnet wird (obwohl Gauß damals schon eine stärkere, aber komplizierter zu erklärende Sache bewiesen hat).

Satz 2. *Wir betrachten eine rationale Lösung l der Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} - \cdots + a_0 = 0$. Wenn man $l = \frac{p}{q}$ als Bruch mit teilerfremden Zähler und Nenner darstellt, dann teilt p den Koeffizienten a_0, und q teilt a_n.*

Diesen Satz kann man sich ganz gut merken, indem man sich zuerst den Spezialfall $a_n = 1$ anschaut. Da gilt dann, dass jede rationale Lösung schon eine ganzzahlige Lösung sein muss, die a_0 teilen muss. Weil a_0 ja das Produkt aller Lösungen ist, ist das sehr einleuchtend (Ein Beweis ist das aber

noch nicht, weil es ja auch nicht ganzzahlige Lösungen als Faktoren von a_0 geben könnte, und weil das Polynom nicht immer in Linearfaktoren zerfallen muss).
Um die ganzzahligen Lösungen eines Polynoms wie $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ zu finden, muss man also einfach nur alle Teiler von 6 (und zwar auch negative, wie -1) ausprobieren.

Beispiel 1. *Finde alle Lösungen von* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ *und von* $x^2 - 6x - 55 = 0$.

Warum machen wir das eigentlich? Einerseits, weil das Lösen von Polynomgleichungen ein wichtiges Stück mathematische Geschichte ist. Im 16. Jahrhundert war hier die vorderste Front der Wissenschaft, und an den fürstlichen Höfen Italiens lieferten sich Menschen wie CARDANO und TARTAGLIA Wettbewerbe, wer das Geheimnis der allgemeinen Lösung für Polynome als erstes ergründen kann. Andererseits kann man damit Gleichungssysteme in mehreren Variablen in den Griff kriegen. Solche Systeme sind in modernen Mathematikolympiaden immer noch eine wichtige Quelle für Beispiele. Finden wir nun alle Paare von Zahlen a, b, sodass $a + b = 3$ und $ab = 2$ gilt. Nehmen wir einmal an, $a = A$ und $b = B$ sei so eine Lösung. Dann gilt

$$(x - A)(x - B) = x^2 - (A + B)x + AB = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Weil aber die Linearfaktorzerlegung eindeutig ist, muss $(x - A)$ entweder $(x - 2)$ oder $(x - 1)$ sein, und $(x - B)$ muss der jeweils andere Term sein. Es gilt also $(A, B) = (1, 2)$ oder $(A, B) = (2, 1)$. Weil A und B nur Platzhalter für beliebige Lösungen waren, haben wir nun alle Lösungen gefunden. Probieren wir nun aus, ob das bei mehr Variablen genauso funktioniert!

Beispiel 2. *Finde alle Lösungen des Systems*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ xy + yz + xz &= 11 \\ xyz &= 6. \end{aligned}$$

Warum sind die Gleichungssysteme heute so viel wichtiger in Wettbewerben als die Polynomgleichungen? Weil es viel mehr Möglichkeiten gibt, sie kreativ ein wenig zu verändern und damit schwieriger zu machen. Betrachten wir zum Beispiel das System $a^2 + b^2 = 25$, $a + b = 8$. Hier können wir nicht sofort den Satz von Vieta verwenden, obwohl das System auch symmetrisch ist (d.h. es verändert sich nicht, wenn man Variablen vertauscht). Aber wenn $a + b = 7$ gilt, dann wissen wir, dass auch $64 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ folgt. Das bedeutet, dass $49 = 25 + 2ab$, also, nach Äquivalenzumformungen, $12 = ab$. Jetzt wissen wir, dass $a + b = 7$ und $ab = 12$ gilt, dass a und b also die zwei verschiedenen Lösungen der Polynomgleichung $x^2 - 7x + 12$ sein müssen. Wenn man alle Teiler von 12 durchprobiert, dann kommt man auf die zwei Lösungen 3 und 4. Das heißt, die Lösungen des ursprünglichen Systems sind $(a, b) = (3, 4)$ und $(a, b) = (4, 3)$. Was muss man tun, um das folgende System auf den Satz von Vieta zurückzuführen?

Beispiel 3. *Bestimme alle reellen Zahlen* a, b, c, *die* $a+b+c = 6$, $a^2+b^2+c^2 = 14$ *und* $a^3+b^3+c^3 = 36$ *erfüllen.*