# 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de" – Aufgabenblatt für den 24. April 2020

## Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Greilhuber zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 21. April 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Greilhuber bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 24. April 2020 von 14:00–15:30 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns,wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

## Aufgaben

**Aufgabe 1.** Bestimme alle reellen Zahlen $a, b$ und $c$, die $a+b=3$, $b+c=5$ und $a+c=4$ erfüllen. Bestimme nun alle reellen Zahlen $a, b, c$ und $d$, die $a+b=3$, $b+c=5$, $c+d=7$ und $a+d=5$ erfüllen. Gibt es relle Zahlen, die $a+b=4$, $b+c=5$, $c+d=7$ und $a+d=5$ erfüllen?

**Aufgabe 2.** Bestimme alle Tripel positiver reeller Zahlen $(a, b, c)$, die das Gleichungssystem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$
$$a+b+c=11$$
$$\sqrt{abc}=6$$

erfüllen.

**Aufgabe 3.** Es seien $p$ und $q$ reelle Zahlen. Die quadratische Gleichung

$$x^2+px+q=0$$

habe die reellen Lösungen $x_1$ und $x_2$. Zusätzlich gelten die folgenden zwei Bedingungen:

1. Die Zahlen $x_1$ und $x_2$ unterscheiden sich voneinander um genau 1.
2. Die Zahlen $p$ und $q$ unterscheiden sich voneinander um genau 1.

Man zeige, dass $p$, $q$, $x_1$ und $x_2$ ganze Zahlen sind.

**Aufgabe 4.** Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$a^2=b(b+7)$$

mit ganzen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

**Aufgabe 5.** Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n$ mit zwei verschiedenen positiven Teilern, die gleich weit von $\frac{n}{3}$ entfernt sind.

**Aufgabe 6.** Es seien $x$ und $y$ ganze Zahlen mit $x+y \neq 0$. Man bestimme alle Paare $(x, y)$, für die $\frac{x^2+y^2}{x+y} = 10$ gilt.

**Aufgabe 7.** Man bestimme alle Quadrupel $(a, b, c, d)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} ab + ac &= 3b + 3c \\ bc + bd &= 5c + 5d \\ ac + cd &= 7a + 7d \\ ad + bd &= 9a + 9b. \end{aligned}$$

# Tipps zu ausgewählten Aufgaben

**Aufgabe 1.** Addiere und subtrahiere geschickt ausgewählte Zeilen voneinander, um einzelne Variablen zu isolieren.

**Aufgabe 2:** Versuche, die Zeilen des Gleichungssystems so zu potenzieren und miteinander zu multiplizieren, dass du den Satz von Vieta anwenden kannst.

**Aufgabe 3:** Benutze den Satz von Vieta oder die kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

**Aufgabe 4:** Ergänze auf vollständige Quadrate und nutze, dass die Abstände zwischen Quadratzahlen immer größer werden. Alternativ: Beweise dass zwei teilerfremde ganze Zahlen, deren Produkt ein Quadrat ist, selbst ein Quadrat sein muss.

**Aufgabe 5:** Schreibe die Bedingung mittels zwei Gleichungen mit ganzzahligen Variablen auf, und addiere diese. Alternativ, denke über Teiler von $n$ nach, die größer als $\frac{n}{3}$ sind.

**Aufgabe 6:** Forme die Gleichung so um, dass auf der linken Seite nur mehr vollständige Quadrate stehen.

**Aufgabe 7:** Versucht, die Gleichung zu faktorisieren und Fälle zu unterscheiden.

# Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

**Aufgabe 1.**

Um das erste Gleichungssystem zu lösen, addieren wir jeweils zwei Zeilen, um

$$7 = 2a + b + c = 2a + 5 \Leftrightarrow a = 1$$
$$8 = a + 2b + c = 2b + 4 \Leftrightarrow b = 2$$
$$9 = a + b + 2c = 2c + 3 \Leftrightarrow c = 3$$

zu erhalten. Diese Methode kann im zweiten Gleichungssystem nicht sofort zum Erfolg führen, weil, wie wir sehen werden, mehr als eine Lösung existiert. Stattdessen nennen wir $a = t$ (nur, um dessen spezielle Rolle hervorzuheben), und berechnen weiter

$$a + b = 3 \Leftrightarrow b = 3 - t$$
$$a + d = 5 \Leftrightarrow d = 5 - t$$
$$c + d = 7 \Leftrightarrow c + 5 - t = 7 \Leftrightarrow c = 2 + t.$$

Für jede Wahl von $t$ löst $(a, b, c, d) = (t, 3 - t, 2 + t, 5 - t)$ das Gleichungssystem. Genau die gleiche Methode führt im letzten Gleichungssystem zu $(a, b, c, d) = (t, 4 - t, 2 + t, 5 - t)$, was aber die Gleichung $b + c = 5$ nie erfüllt! (Das ist nicht so überraschend, denn diese Gleichung haben wir in unserer Argumentation gar nicht verwendet.) Also gibt es keine Lösung.

**Aufgabe 2.**

Weil alle Zahlen positiv sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung, und aus der letzten Zeile folgt $abc = 36$. Multipliziert man das mit der ersten Zeile, so erhält man $ab + bc + ac = 36$. Zusammen mit $a + b + c = 11$ sind das alle Gleichungen, die wir brauchen, um den Satz von Vieta (genauer gesagt, dessen Umkehrung) anzuwenden. Also sind $a$, $b$ und $c$ Lösungen der polynomiellen Gleichung $x^3 - 11x^2 + 36x - 36$. Ausprobieren ergibt die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$, woraus $x_3 = 6$ folgt (etwa mit $x_1 + x_2 + x_3 = 11$). Also sind alle Lösungen durch Vertauschungen von $(a, b, c) = (2, 3, 6)$ gegeben.

**Aufgabe 3.**

Legen wir fest, dass $x_2 = x_1 + 1$. Nach dem Satz von Vieta wissen wir, dass $x_1 + x_2 = -p$ gilt, also $-2x_1 - 1 = p$. Gleichzeitig gilt $x_1 x_2 = x_1 \cdot (x_1 + 1) = q$, also $x_1^2 + x_1 = q$. Unterscheiden wir nun zwei Fälle: Wenn $q = p - 1$ gilt, dann erhalten wir $x_1^2 + x_1 = q = p - 1 = -2 - 2x_1$, also löst $x_1$ die quadratische Gleichung $x_1^2 + 3x_1 + 2 = 0$. Die zwei Lösungen dieser Gleichung sind $x_1 = -1$ und $x_1 = 2$. Im anderen Fall $q = p + 1$ erhalten wir $x_1^2 + x_1 = q = p + 1 = -2x_1$, was auf die quadratische Gleichung $x_1 \cdot (x_1 + 3) = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_1 = 3$ führt. In jedem Fall ist $x_1$ ganzzahlig, also auch $x_2 = x_1 + 1$ und damit auch $p = -x_1 - x_2$ und $q = x_1 x_2$.

**Aufgabe 4.**

Damit wir auf ein ganzzahliges vollständiges Quadrat ergänzen können, multiplizieren wir die Gleichung mit 4 und schreiben $4a^2 = (2a)^2 = 4b^2 + 28b + 7^2 - 7^2 = (2b + 7)^2 - 49$. Bringen wir alle Unbekannten auf die rechte Seite, so ergibt sich $(2b + 7)^2 - (2a)^2 = 49$, und mit der dritten binomischen Formel $(2b+7-2a)(2b+7+2a)=49$. Es sind also $2b+7-2a$ und $2b+7+2a$ ganzzahlige Teiler von 49. Wenn wir sie mit $d_1$ und $d_2$ benennen, erhalten wir $a=\frac{d_2-d_1}{4}$ und $b=\frac{d_2+d_1-14}{4}$. Setzt man alle Paare von Teilern $(d_1,d_2)$ mit 49 in diese Formeln ein, so erhält man $(a,b)\in\{(-12,-16);(0,-7);(12,-16);(-12,9);(0,0);(12,9)\}$, und die Probe beweist, dass alle diese Paare tatsächlich Lösungen sind.

**Aufgabe 5.**

Da die Teiler verschieden sein müssen, muss einer der Teiler größer als $\frac{n}{3}$ sein, weil aber 2 der kleinstmögliche positive Teiler von $n$ ist, ist $\frac{n}{2}$ der einzige mögliche größere Teiler. Die Bedingung, dass der andere Teiler denselben Abstand von $\frac{n}{3}$ hat, heißt, dass er

$$\frac{n}{3}-\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{3}\right)=n\cdot\left(\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{n}{6}$$

sein muss. Das heißt, dass $n$ durch 6 teilbar (und verschieden von 0) sein muss, und genau dann gibt es mit $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{6}$ auch zwei verschiedene Teiler, die die gewünschte Eigenschaft haben.

**Aufgabe 6.**

Durch Multiplizieren mit dem Nenner $x+y$ erhalten wir $x^2+y^2=10x+10y$. Bringen wir alles auf die linke Seite, so erhalten wir $x^2-10x+y^2-10y=0$. Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat führt auf $x^2-10x+25+y^2-10y+25=(x-5)^2+(y-5)^2=50$. Wir wollen also 50 als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen. Ausprobieren aller kleineren Quadratzahlen $1,4,9,16,25,49$ führt auf die Möglichkeiten $(\pm1)^2+(\pm7)^2=(\pm5)^2+\pm(5)^2=(\pm7)^2+(\pm1)^2=50$, also auf die Lösungen $(x,y)\in\{(-2,4);(4,-2);(-2,6);(6,-2);(10,0);(0,10);(10,10);(6,12);(12,6);(4,12);(12,4)\}$.

**Aufgabe 7.**

Wir faktorisieren die Zeilen wie folgt: $a(b+c)=3(b+c)$, also $(a-3)(b+c)=0$. Daher gilt immer mindestens eine der zwei Bedingung in jeder Zeile der folgenden Tabelle:

| | |
|---|---|
| $a=3$ | $b=-c$ |
| $b=5$ | $d=-c$ |
| $c=7$ | $d=-a$ |
| $d=9$ | $b=-a.$ |

Jeweils drei der Bedingungen auf der rechten Seite führen bereits auf die Lösung $(a,b,c,d)=(t,-t,t,-t)$, $t\in\mathbb{R}$. Jeweils drei der Bedingungen auf der linken Seite können nicht zusammen mit der letzten Bedingung auf der rechten Seite eintreten, also führen sie auf die Lösung $(a,b,c,d)=(3,5,7,9)$. Es bleiben noch 6 Fälle, in denen genau zwei Bedingungen der linken Seite und zwei auf der rechten Seite eintreffen, diese erledigen wir am besten mit einer Tabelle:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a=3$ | $b=5$ | $d=-a$ | $b=-a$ | Keine Lösung, |
| $b=-c$ | $b=5$ | $c=7$ | $b=-a$ | Keine Lösung, |
| $b=-c$ | $d=-c$ | $c=7$ | $d=9$ | Keine Lösung, |
| $a=3$ | $d=-c$ | $d=-a$ | $d=9$ | Keine Lösung, |
| $a=3$ | $d=-c$ | $c=7$ | $b=-a$ | (a,b,c,d) = (3,-3,7,-7), |
| $b=-c$ | $b=5$ | $d=-a$ | $d=9$ | (a,b,c,d) = (-9,5,-5,9). |

Der Grund dafür, dass wir in den ersten vier Fällen keine Lösung erhalten, sind Widersprüche der Form $3=a=-b$, $b=5\neq-3$. Also erhalten wir die Lösungen $(t,-t,t,-t), t\in\mathbb{R}$, $(3,5,7,9)$, $(3,-3,7,-7)$ und $(-9,5,-5,9)$.

# Quellenangaben zu den Aufgaben

## Quellen der Aufgaben

**Aufgabe 1.**

MmF-Team.

**Aufgabe 2.**

MmF-Team.

**Aufgabe 3.**

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2011 (nachzulesen in [1]), bearbeitet vom MmF-Team

**Aufgabe 4.**

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2014 (nachzulesen in [1]), bearbeitet vom MmF-Team.

**Aufgabe 5.**

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2016 (nachzulesen in [1]), bearbeitet vom MmF-Team.

**Aufgabe 6.**

Junior-Regionalwettbewerb 2019 bearbeitet vom MmF-Team.

**Aufgabe 7.**

Gebietswettbewerb 2014 (nachzulesen in [1]), bearbeitet vom MmF-Team.

# Literatur

[1] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.