



51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 8. Mai 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Inna Roitberg zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge [per E-Mail](#).

Am 5. Mai 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Levi Haunschmid bespricht die Aufgaben mit euch im [virtuellen Olympiade-Kurs](#) am 8. Mai 2020 von 14:00–15:30 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

[Schreibe uns](#), wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Radioaktive Kugeln ^{1 2}

Aufgabe 1. Eine radioaktive Kugel.

Gegeben sind N Kugeln, eine davon ist radioaktiv. Mithilfe eines Strahlungsdetektors können wir herausfinden, ob eine Kugel oder eine Gruppe von Kugeln radioaktiv ist (d.h wir können den Detektor auf eine oder auf mehrere Kugeln gleichzeitig anwenden). Wie viele Messungen sind notwendig, um die radioaktive Kugel zu finden? Löse diese Aufgabe für verschiedene Werte von N :

- a.) $N = 2$ b.) $N = 3$ c.) $N = 4$ d.) $N = 5$
e.) $N = 8$ f.) $N = 11$ g.) $N = 16$ h.) $N = 17$

Versuche jetzt die Abhängigkeit zwischen der Anzahl der Kugeln und der Anzahl der benötigten Messungen für beliebiges N anzugeben.

Aufgabe 2. Zwei radioaktive Kugeln.

- a.) Gegeben sind 7 Kugeln, genau 2 davon sind radioaktiv. Finde diese mit 5 Messungen.
b.) Gegeben sind 10 Kugeln, genau 2 davon sind radioaktiv. Finde diese mit 6 Messungen.
c.) Gegeben sind 11 Kugeln, genau 2 davon sind radioaktiv. Kann man diese mit 7 Messungen finden?
d.) Gegeben sind 15 Kugeln, genau 2 davon sind radioaktiv. Finde diese mit 7 Messungen.

Aufgabe 3. Mehrere radioaktive Kugeln. Gegeben sind 10 Kugeln, genau 6 davon sind radioaktiv. Kann man diese mit 9 Messungen finden, wenn unser Messgerät nur zwei Kugeln gleichzeitig messen kann, und nur dann die Strahlung entdeckt, wenn die beide Kugeln radioaktiv sind?

¹Vergleiche mit den Aufgaben vom Arbeitsblatt *Waagen und Münzen*!

²Noch im März hat die Tageszeitung „Kurier“ geschrieben, dass Mathematiker der TU Wien vorgeschlagen haben, dass man die Corona-Proben poolen kann, damit man schneller und mehr Menschen testen kann. „*Das funktioniert so: man leert die Proben von einigen Proben zusammen und testet dann. Wenn das Ergebnis negativ ist, kann man sagen, dass alle negativ sind, weil die analytische Sensitivität so hoch ist. Ist die Pool-Probe positiv, muss man natürlich jeden einzelnen Patienten in diesem Pool nachtesten*“ (26. März 2020). Es gibt in gewissermaßen eine Analogie mit unseren Kugel-Aufgaben!

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1.

- Vergleiche diese Aufgaben mit den Aufgaben vom Arbeitsblatt Waagen und Münzen.
- Versuche die Kugeln so zu teilen, dass die Teilmengen uns nicht nur zu den früheren Aufgaben, sondern auch zur minimalen Anzahl an Messungen führen.
- Wenn das Teilen auf zwei Gruppen immer das beste Verfahren ist, können wir die Zweierpotenzen benutzen, um allgemeine Abhängigkeit zu suchen.

Aufgabe 2: Um die Hinweise und Lösungen besser zu formulieren, nummerieren wir die Kugeln.

1. Man kann mit den Paaren $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$ anfangen (drei Messungen) und dann die Ergebnisse analysieren.
2. Wir messen zuerst die Kugeln $\{1, 2, 3\}$. Wenn der Test negativ ist, kommen wir zu Aufgabe 2 a.).
3. Siehe den Hinweis zu Aufgabe 2 d.)
4. Fangen wir mit der Gruppe der Kugeln $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ an. Wenn dieser Test negativ ist, kommen wir zur Aufgabe 2 c.). Anderenfalls testen wir beispielsweise die Kugeln $\{4, 5, 6\}$, analysieren das Ergebnis und überlegen weitere Schritte.

Aufgabe 3: Es wäre günstig, eine radioaktive Kugel zu finden und diese als Muster zu benutzen. Die ersten vier Messungen können $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$ und $\{7, 8\}$ sein. Mögliche Ergebnisse:

- (i) Alle vier Proben sind negativ
- (ii) Genau eine Probe ist positiv
- (iii) Genau zwei Proben sind positiv
- (iv) Genau drei Proben sind positiv

Im letzten Fall haben wir alle sechs radioaktiven Kugeln schon gefunden.

Wenn alle vier Proben negativ sind, sind die letzte zwei Kugeln 9 und 10 radioaktiv. Eine davon können wir als Muster benutzen und mit anderen Kugeln zum Testen kombinieren.

In den Fällen 2. oder 3. haben wir schon zwei oder vier radioaktiven Kugeln gefunden und können wieder die Muster-Kugel benutzen.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir nummerieren die Kugeln mit 1 bis N .

Wir verwenden für die k -te Messung, wenn sie die Kugeln i und j beinhaltet, die Schreibweise $M_k\{i, j\}$. Wird bei einer Messung Radioaktivität festgestellt, so legen wir dafür den Wert von $M_k\{i, j\}$ als 1 fest, ansonsten den Wert 0. (Eine Messung kann natürlich auch nur eine oder auch mehr als zwei Kugeln umfassen.)

Mit $\mu(N)$ bezeichnen wir die mindestens benötigte Anzahl an Messungen, um unter N Kugeln die radioaktive Kugel zu finden.

a.) $N = 2 = 2^1$ Kugeln $\{1, 2\}$.

Eine Messung $M_1\{1\}$ gibt uns die Antwort. Wenn diese positiv ist ($M_1\{1\} = 1$), ist Kugel 1 radioaktiv. Anderenfalls ($M_1\{1\} = 0$) ist die Kugel 2 radioaktiv.

Antwort: $\mu(N = 2) = 1$.

b.) $N = 3 = 2^1 + 1$ Kugeln $\{1, 2, 3\}$.

$$M_1\{1, 2\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{die Kugel 3 radioaktiv ist.} \\ 1 \Rightarrow \text{der Fall } N = 2, \mu(N = 2) = 1. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 3) = 2$.

c.) $N = 4 = 2^2$ Kugeln.

$$M_1\{1, 2\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{3, 4\} \text{ radioaktiv ist.} \Rightarrow N = 2, \mu(N = 2) = 1. \\ 1 \Rightarrow N = 2, M_2\{1\}. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 4) = 2$.

d.) $N = 5 = 2^2 + 1$ Kugeln.

$$M_1\{1, 2, 3\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{4, 5\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 2, \mu(N = 2) = 1. \\ 1 \Rightarrow N = 3, \mu(N = 3) = 2. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 5) = 3$.

$N = 6 = 2^2 + 2$ Kugeln.

$$M_1\{1, 2, 3\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{4, 5, 6\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 3, \mu(N = 3) = 2. \\ 1 \Rightarrow N = 3, \mu(N = 3) = 2. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 6) = 3$.

$N = 7 = 2^2 + 3$ Kugeln.

$$M_1\{1, 2, 3, 4\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{5, 6, 7\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 3, \mu(N = 3) = 2. \\ 1 \Rightarrow N = 4, \mu(N = 4) = 2. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 7) = 3$.

e.) $N = 8 = 2^3$ Kugeln.

$$M_1\{1, 2, 3, 4\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{5, 6, 7, 8\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 4, \mu(N = 4) = 2. \\ 1 \Rightarrow N = 4, \mu(N = 4) = 2. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 8) = 3$.

$N = 9 = 2^3 + 1$ Kugeln.

$$M_1\{1, 2, 3, 4, 5\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{6, 7, 8, 9\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 4, \mu(N = 4) = 2. \\ 1 \Rightarrow N = 5, \mu(N = 5) = 3. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 9) = 4$.

f.) $N = 11 = 2^3 + 3$ Kugeln.

$$M_1\{1, \dots, 6\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{dann eine von } \{7, \dots, 11\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 5, \mu(N = 5) = 3. \\ 1 \Rightarrow N = 6, \mu(N = 6) = 3. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 11) = 4$.

g.) $N = 16$

$$M_1\{1, \dots, 8\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{dann eine von } \{9, \dots, 16\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 8, \mu(N = 8) = 3. \\ 1 \Rightarrow N = 8, \mu(N = 8) = 3. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 16) = 4$.

h.) $N = 17$

$$M_1\{1, \dots, 9\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{dann eine von } \{10, \dots, 17\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 8, \mu(N = 8) = 3. \\ 1 \Rightarrow N = 9, \mu(N = 9) = 4. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 17) = 5$.

Wir sehen, dass sich die Anzahl der benötigten Messungen direkt nach einer 2-er Potenz ($N=2^n$) ändert. Wenn $2^{n-1} + 1 \leq N \leq 2^n$, ist Anzahl der Messungen $\mu(N) = n$. Zum Beispiel, für N von 9 bis $2^4 = 16$ brauchen wir 4 Messungen; für N von 17 bis $2^5 = 32$ brauchen wir 5 Messungen; für N von 33 bis $2^6 = 64$ brauchen wir 6 Messungen.

Aufgabe 2.

Wir werden eine Kugel oder eine Menge der Kugeln sauber nennen, wenn diese nicht-radioaktiv ist. Außerdem bezeichnen wir als r-Kugel und r-Paar eine radioaktive Kugel und ein radioaktives Paar (d.h. beide Kugeln sind radioaktiv).

a.) Wir fangen mit drei Messungen an: $M_1\{1, 2\}$, $M_2\{3, 4\}$, $M_3\{5, 6\}$. Nur zwei Fälle sind möglich:

- (i) Genau zwei Proben davon sind positiv, zum Beispiel $M_1\{1, 2\}$ und $M_2\{3, 4\}$. Dann haben wir schon die zwei radioaktiven Kugeln geortet: jedes Paar enthält genau eine radioaktive Kugel. Wir finden diese mithilfe der Messungen $M_4\{1\}$ und $M_5\{3\}$.

- (ii) Nur eine davon ist positiv, zum Beispiel $M_1\{1, 2\}$. Dann enthält dieses Paar entweder beide radioaktiven Kugeln, oder nur eine (und dann ist die 7. Kugel radioaktiv). Weitere Messungen:

$$M_4\{7\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{Kugeln 1 und 2 sind radioaktiv} \\ 1 \Rightarrow M_5\{1\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{Kugeln 2 und 7 sind radioaktiv} \\ 1 \Rightarrow \text{Kugeln 1 und 7 sind radioaktiv.} \end{cases} \end{cases}$$

b.) Wir messen zuerst die Kugeln $\{1, 2, 3\}$.

- (i) Wenn die Probe $M_1\{1, 2, 3\}$ negativ ist, sind zwei von sieben Kugeln $\{4, \dots, 10\}$ radioaktiv. Wir finden diese mit 5 Messungen.
- (ii) Wenn die Probe $M_1\{1, 2, 3\}$ positiv ist, enthält diese Gruppe entweder beide oder nur eine radioaktive Kugel. Wir untersuchen jetzt zwei dieser drei Kugeln: $M_2\{1\}$ und $M_3\{2\}$. Wenn beide diese Proben positiv sind, sind Kugeln 1 und 2 radioaktiv. Wenn nur eine davon positiv ist, zum Beispiel $M_2\{1\}$, ist eine von $8 = 2^3$ Kugeln $\{3, 4, \dots, 10\}$ radioaktiv. Diese finden wir mit 3 Messungen.

c.) Wir messen zuerst die Kugeln $\{1, 2, 3, 4\}$.

- (i) Wenn die Probe $M_1\{1, 2, 3, 4\}$ negativ ist, sind zwei der sieben Kugeln $\{5, \dots, 11\}$ radioaktiv. Wir finden diese mit 5 Messungen.
- (ii) Wenn die Probe $M_1\{1, 2, 3, 4\}$ positiv ist, enthält diese Gruppe entweder beide oder nur eine radioaktive Kugel. Wir machen jetzt drei Messungen: $M_2\{1\}$, $M_3\{2\}$ und $M_4\{3\}$. Wenn zwei davon positiv sind, sind die entsprechende Kugeln radioaktiv. Wenn nur eine davon positiv ist, zum Beispiel $M_2\{1\}$, ist eine von $8 = 2^3$ Kugeln $\{4, 5, \dots, 11\}$ radioaktiv. Diese finden wir mit 3 Messungen.

d.) Wir geben zwei Lösungsverfahren für diese Aufgabe an.

Verfahren I. Dieses Verfahren entspricht dem Hinweis.

Wir berechnen zuerst, aus wie vielen möglichen Paaren das r-Paar ausgewählt werden müsste:

$$n = 14 + 13 + 12 + \dots + 2 + 1 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105.$$

Also müssen wir die Kugeln so aufteilen, dass jede nächste Messung diese Zahl in etwa halbiert. Fünf Kugeln geben uns $14 + 13 + 12 + 11 + 10 = \frac{24 \cdot 5}{2} = 60$ Varianten, und wenn diese Probe negativ ist, bleiben $105 - 60 = 45$ Varianten. Das wäre eine guter Anfang. Also ist die erste Messung $M_1\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wenn diese negativ ist, gehören beide gesuchten Kugeln der Menge $\{6, 7, \dots, 15\}$ an, und wir müssen zwei aus zehn Kugeln finden; das haben wir schon früher mit 6 Messungen gemacht. Wenn diese Probe positiv ist, wählen wir Kugeln für die nächste Probe, und versuchen immer, die Anzahl der möglichen radioaktiven Paare auf zwei relativ gleiche Teile aufzugliedern.

(Diese Methode findet bei vielen Problemstellungen Anwendungen und wird oft mit Divide & Conquer (Teile und herrsche) bezeichnet. In diesem Fall ist diese Methode allerdings viel komplizierter als eine andere Möglichkeit zur Lösung. Deshalb geben wir bei dieser Aufgabe ein zweites Lösungsverfahren an.)

Verfahren II. Wir teilen alle 15 Kugeln in vier Gruppen *mit Wiederholungen* auf:

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\{1, 6, 7, 8, 9\}$

$\{1, 10, 11, 12, 13\}$

$\{14, 15\}$

(die ersten drei Mengen enthalten eine gemeinsame Kugel, nämlich $\{1\}$). Die ersten drei Messungen sind:

$M_1\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$M_2\{1, 6, 7, 8, 9\}$

$M_3\{1, 10, 11, 12, 13\}$.

Folgende vier Ergebniskombinationen sind möglich:

- (i) Alle drei Proben sind negativ. Dann ist $\{14, 15\}$ das gesuchte r-Paar.
- (ii) Zwei negative und eine positive Probe. Das bedeutet, dass Kugel $\{1\}$ sauber ist, und dass andere vier Kugeln $\{a, b, c, d\}$ aus der positiven Gruppe zusammen mit $\{14, 15\}$ beide radioaktiven Kugeln enthalten. Nächste Messung:

$$M_4\{14, 15\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} \text{Messungen } M_5\{a\}, M_6\{b\}, M_7\{c\} \text{ geben uns} \\ \text{die zwei radioaktiven Kugeln von vier } \{a, b, c, d\}. \end{array} \right. \\ \\ 1 \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} \text{Eine Kugel finden wir mit zwei Messungen } M_5, M_6 \\ \text{aus der Menge } \{a, b, c, d\}, \text{ und die andere} \\ \text{mit siebter Messung aus der Menge } \{14, 15\} \\ \text{(siehe Aufgabe 1 c.) und Aufgabe 1 a.)}. \end{array} \right. \end{cases}$$

- (iii) Eine negative und zwei positiven Proben. Wir testen diese zwei positiven Vierer-Gruppen (ohne $\{1\}$) je mit zwei Messungen (siehe Aufgabe 1 c.).
- (iv) Alle drei Proben sind positiv. Dann ist die Kugel 1 radioaktiv. Die zweite r-Kugel finden wir mit drei Messungen aus der Menge $\{2, 3, \dots, 15\}$ (14 Kugeln, siehe Aufgabe 1).

Aufgabe 3.

Es wäre günstig, eine radioaktive Kugel (r-Kugel) zu finden und diese als „Muster“ $\{r\}$ zu benutzen. Die ersten vier Messungen können $M_1\{1, 2\}$, $M_2\{3, 4\}$, $M_3\{5, 6\}$ und $M_4\{7, 8\}$ sein. Mögliche Ergebnisse:

- (i) Alle vier Proben sind negativ. Dann sind die übrigen beiden Kugeln 9 und 10 radioaktiv und alle vier getesteten Paare enthalten je eine r-Kugel. Eine von $\{9, 10\}$ können wir als Muster benutzen und mit den anderen Kugeln zum Testen kombinieren, um die vier radioaktiven zu finden. Zum Beispiel, $M_5\{1, r\}$, $M_6\{3, r\}$, $M_7\{5, r\}$ und $M_8\{7, r\}$.
- (ii) Genau drei Proben sind positiv. Dann haben wir alle sechs radioaktiven Kugeln schon gefunden.
- (iii) Genau zwei Proben sind positiv. Dann haben wir vier r-Kugeln schon gefunden, zum Beispiel, 1, 2, 3, 4. Eine davon nehmen wir als Muster $\{r\}$ und machen fünf Messungen $M_5\{5, r\}$, $M_6\{6, r\}$, $M_7\{7, r\}$, $M_8\{8, r\}$ und $M_9\{9, r\}$ um die beiden weiteren r-Kugeln zu finden.
- (iv) Genau eine Probe ist positiv. Dann haben wir zwei r-Kugeln gefunden, zum Beispiel 1 und 2, und messen $M_5\{9, 10\}$. Wenn diese Probe negativ ist, enthalten alle vier negativen Paare je eine r-Kugel. Wir finden diese mit vier Messungen mit der Muster-Kugel, wie im ersten Fall. Wenn die Probe $M_5\{9, 10\}$ positiv ist, müssen wir weitere zwei r-Kugeln von 6 mit vier Messungen finden (aus drei negativen Paaren). Wenn wir weitere Messungen machen, führt es uns auf die Aufgabe, eine r-Kugel aus drei mit einer Messung zu finden, was unmöglich ist.

Also brauchen wir mindestens 10 Messungen um 6 radioaktive von 10 Kugeln mit dem gegebenen Messgerät zu finden.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 2.

a.) und b.) von Inna Roitberg

c.) [2], S.67, übersetzt von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

d.) aus [1], übersetzt von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.

von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

Literatur

[1] Nauka i zhizn (science and life). <https://www.nkj.ru/>, 1986. Naturwissenschaftsmagazin, das bereits 1890 erschien und nun in Russland in russischer Sprache erscheint. (aufgerufen am 12.05.2020).

[2] S. Rabinowitz and M. Bowron. *Index to Mathematical Problems 1975–1979*. MathPro Press, Westford, MA, 2002.