51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 29. Mai 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Greilhuber zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 26. Mai 2020 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Greilhuber bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 29. Mai 2020 von 14:00–15:30 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Für eine reelle Zahl x sei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Beispielweise sind $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$ und $\lfloor -0.1 \rfloor = -1$. Diese Zahl wird oft als die *Gaußklammer* von x bezeichnet. Der übrigbleibende Rest $x - \lfloor x \rfloor$ wird oft mit dem Symbol $\{x\}$ bezeichnet. Beispiele mit diesen beiden Objekten waren in der österreichischen Mathematik-Olympiade eine Zeit lang sehr beliebt, und hier wollen wir ein paar dieser Aufgaben anschauen.

Aufgabe 1. Man zeige: Es gibt keine positive rationale Zahl x mit

$$x^{\lfloor x \rfloor} = \frac{9}{2}$$

Aufgabe 2. Für die reellen Zahlen x und y gilt $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 10$ und $\lfloor \sqrt{y} \rfloor = 14$. Wie groß ist

$$\left\lfloor \sqrt{\left\lfloor \sqrt{\lfloor x + y \rfloor} \right\rfloor} \right\rfloor ?$$

Bemerkung: Für $r \geq 0$ ist $\sqrt{r}$ die eindeutig bestimmte *positive* Zahl, die quadriert r ergibt.

Aufgabe 3. Man bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die gleichzeitig die folgenden drei Gleichungen erfüllen.

$$\begin{aligned}\lfloor x \rfloor + \{y\} &= z\\ \lfloor y \rfloor + \{z\} &= x\\ \lfloor z \rfloor + \{x\} &= y\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 5. Man bestimme alle reellen Zahlen x mit $x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor = \sqrt{2}$.

Aufgabe 6. Man bestimme alle reellen Zahlen x mit $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{4} \rfloor = x^2$.

Aufgabe 7. *(Dirichletscher Approximationssatz).* Gegeben sei eine positive irrationale Zahl a. Man zeige, dass es für jede Zahl $b \in [0, 1]$ eine natürliche Zahl n gibt, sodass der Abstand von b und $\{n \cdot a\}$ kleiner als $\frac{1}{q}$ ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Unterscheide die Fälle $\lfloor x \rfloor = 0, 1, 2, \ldots$. Du darfst verwenden, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Aufgabe 2: Formuliere die Bedingung $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 10$ in $100 \leq x < 121$ um, und versuche, Rechenregeln für Ausdrücke zu finden, die solche Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 3: Ändert sich $\{x\}$, wenn wir zu x eine ganze Zahl hinzufügen?

Aufgabe 4: Faktorisiere beide Seiten und überlege, was du über Produkte von Zahlen mit diesen Eigenschaften sagen kannst.

Aufgabe 5: Was passiert, wenn $\lfloor x \rfloor = 0$? Was, wenn $\lfloor x \rfloor = 1$ und was wenn $\lfloor x \rfloor \geq 2$? Vorsicht, negative Zahlen sind hier auch erlaubt!

Aufgabe 6: Schließe negative Zahlen und große positive Zahlen aus. Dann bleiben nur mehr endlich viele Möglichkeiten für x übrig.

Aufgabe 7: Beweise zuerst, dass $\{x - y\} = \{\{x\} - \{y\}\}$ und dass $\{m \cdot x\} = \{m \cdot \{x\}\}$ gilt. Mit dem Schubfachschluss folgt die Aussage für $b = 0$, und daraus kann man die Aussage für beliebige b beweisen.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Beweis durch vollständige Fallunterscheidung:

- **Fall 1.** $x \in (0,\, 1) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 0$. Dann gilt $x^{\lfloor x \rfloor} = x^0 = 1 \neq \frac{9}{2}$.
- **Fall 2.** $x \in [1,\, 2) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 1$. Dann gilt $x^{\lfloor x \rfloor} = x \neq \frac{9}{2}$, da $\frac{9}{2} > 2$.
- **Fall 3.** $x \in [2,\, 3) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 2$. Dann gilt $x^{\lfloor x \rfloor} = x^2 = \frac{9}{2}$ genau dann, wenn $x = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, was als Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl nicht rational ist.
- **Fall 4.** $x \in [3,\, \infty) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \geq 3$. Dann gilt $x^{\lfloor x \rfloor} \geq 3^{\lfloor x \rfloor} \geq 3^3 = 27 > \frac{9}{2}$, also gibt es in diesem Intervall auch kein solches x.

Aufgabe 2.

Die Bedingungen $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 10$ und $\lfloor \sqrt{y} \rfloor = 14$ sind äquivalent zu $x \in [100, 121)$ und $y \in [196, 225)$. Für Intervalle positiver reeller Zahlen gilt im allgemeinen $r \in (a,\, b) \Leftrightarrow \sqrt{r} \in (\sqrt{a},\, \sqrt{b})$ sowie $r \in (a,\, b), s \in (c,\, d) \Leftrightarrow r + s \in (a + c,\, b + d)$, was wir uns nun zunutze machen.

$$
\begin{aligned}
x \in [100,\, 121), y \in [196,\, 225) &\Leftrightarrow x + y \in [296,\, 346) \Leftrightarrow \lfloor x + y \rfloor \in [296,\, 345] \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\lfloor x + y \rfloor} \in (\sqrt{296},\, \sqrt{345}) \Leftrightarrow \left\lfloor \sqrt{\lfloor x + y \rfloor} \right\rfloor \in [17,\, 18] \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\left\lfloor \sqrt{\lfloor x + y \rfloor} \right\rfloor} \in [\sqrt{17},\, \sqrt{18}] \Leftrightarrow \left\lfloor \sqrt{\left\lfloor \sqrt{\lfloor x + y \rfloor} \right\rfloor} \right\rfloor = 4.
\end{aligned}
$$

Hier wurde verwendet, dass $\lfloor \sqrt{296} \rfloor = 17$, da $17^2 = 289 \leq 296 < 324 = 18^2$, und dass $\lfloor \sqrt{345} \rfloor = 18$, da $18^2 = 324 \leq 345 < 361 = 19^2$.

Aufgabe 3.

Für eine reelle Zahl x und eine ganze Zahl n gilt immer $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$. Das kann man auch leicht beweisen: Weil $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, folgt klarerweise $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$, womit $\lfloor x \rfloor + n$ also die größte ganze Zahl ist, die kleiner oder gleich $x + n$ ist. Wir schließen weiter, dass $\{x + n\} = x + n - \lfloor x + n \rfloor = x + n - \lfloor x \rfloor - n = \{x\}$.
Aus der Gleichung $\lfloor x \rfloor + \{y\} = z$ folgt also $\{z\} = \{\lfloor x \rfloor + \{y\}\} = \{y\}$, und aus den zwei anderen folgt $\{z\} = \{x\}$ und $\{x\} = \{y\}$. Erneutes Einsetzen in die Gleichungen ergibt $z = \lfloor x \rfloor + \{y\} = \lfloor x \rfloor + \{x\} = x$, und analog $x = y$. Wir erhalten also als Lösungsmenge $L = \{(t,\, t,\, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 4.

Die Gleichung lässt sich faktorisieren in $\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor + 1) = (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$. Wir bezeichnen $\alpha := \lfloor x \rfloor$ und $\beta := x - \frac{1}{2}$ und betrachten zunächst die allgemeine Gleichung $\alpha(\alpha + 1) = \beta(\beta + 1)$. Als quadratische Gleichung in α aufgefasst, erhalten wir mit der kleinen Lösungsformel
$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \beta + \beta^2} = -\frac{1}{2} \pm (\beta + \frac{1}{2})$, also $\alpha \in (\beta,\, -1 - \beta)$.

Der Fall $\alpha = \beta$ tritt ein, wenn $\lfloor x \rfloor = x - \frac{1}{2}$, was genau für $x \in \{\frac{2n+1}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$ gilt. Der Fall $\alpha = -1 - \beta$ würde bedeuten, dass $\lfloor x \rfloor = -\frac{1}{2} - x$. Für $x \geq 0$ gilt aber $\lfloor x \rfloor \geq 0 > -\frac{1}{2} - x$, und für $x < 0$ gilt $\lfloor x \rfloor \leq -1 < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} - x$, also tritt dieser Fall nie ein. Wir erhalten also die Lösungsmenge $L = \{\frac{2n+1}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 5.

Die einzige solche Zahl ist $\sqrt{2}$, was wir durch vollständige Fallunterscheidung beweisen:

- **Fall 1.** $x \in (-\infty, 0) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \leq -1$. Dann gilt weiter
$$x\lfloor x \rfloor > 0 \Rightarrow \lfloor x\lfloor x \rfloor \rfloor \geq 0 \Rightarrow x\lfloor x\lfloor x \rfloor \rfloor \leq 0 < \sqrt{2},$$
also gibt es in diesem Fall keine Lösung.
- **Fall 2.** $x \in [0, 1) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 0$. Dann ist $x\lfloor x\lfloor x \rfloor \rfloor = 0$, also gibt es auch hier keine Lösung.
- **Fall 3.** $x \in [1, 2) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 1$. Wir folgern $x\lfloor x\lfloor x \rfloor \rfloor = x\lfloor x \rfloor = x$, also ist $x = \sqrt{2}$ die einzige Lösung in diesem Fall.
- **Fall 4.** $x \in [2, \infty) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \geq 2$. Weil die Gaußklammer eine monotone Funktion ist, erhalten wir $x\lfloor x\lfloor x \rfloor \rfloor \geq x\lfloor 2x \rfloor = 4x \geq 8 > \sqrt{2}$, also keine Lösung.

Aufgabe 6.

Für negatives x ist die linke Seite negativ, die rechte aber positiv, also gibt es keine solche Lösung. Aus $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor > \frac{x}{2} - 1$, $\lfloor \frac{x}{3} \rfloor > \frac{x}{3} - 1$ und $\lfloor \frac{x}{4} \rfloor > \frac{x}{4} - 1$ können wir schließen, dass $\frac{x-2}{2} \cdot \frac{x-3}{3} \cdot \frac{x-4}{4} < x^2$, solange $x \geq 4$ gilt. Ausmultiplizieren ergibt $x^3 - 33x^2 + 26x - 24 < 0$. Für $x \geq 33$ ist $x^2(x - 33) + 26x - 24$ sicher nicht negativ, also gilt es nur mehr $x \in (0, 33)$ zu betrachten. Andererseits gilt auch $x^2 = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{4} \rfloor \leq \frac{x^3}{24}$, woraus sofort folgt, dass entweder $x = 0$ oder $x \geq 24$. Eine Lösung ist tatsächlich durch $x = 0$ gegeben.
Wenn $x \in [k, k+1)$ für eine natürliche Zahl k gilt, so ist $\lfloor \frac{x}{m} \rfloor = \lfloor \frac{k}{m} \rfloor$ für $m \in \{2, 3, 4\}$, da einerseits $\lfloor \frac{k}{m} \rfloor \leq \frac{k}{m} \leq \frac{x}{m}$ gilt und andererseits $\lfloor \frac{k}{m} \rfloor + 1 \geq \frac{k}{m} - \frac{m-1}{m} + 1 > \frac{x}{m}$. Wir können also die Fälle $x \in [k, k+1)$ für $k \in \{24, \ldots, 32\}$ unterscheiden und untersuchen jedes Mal, ob $\sqrt{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{4} \rfloor}$ im Intervall $[k, k+1)$ liegt. Dies ist zweimal der Fall, und zwar für $k = 24$ und $k = 29$. Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge $L = \{0, 24, 29\}$.

Aufgabe 7.

Weil der Unterschied von $\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ und $\lfloor x - y \rfloor$ eine ganze Zahl ist, und der Dezimalanteil von Zahlen, die sich um eine ganze Zahl unterscheiden, gleich ist, gilt $\{\{x\} - \{y\}\} = \{x - \lfloor x \rfloor - y - \lfloor y \rfloor\} = \{x - y - \lfloor x - y \rfloor\} = \{x - y\}$. Ganz genauso beweist man, dass $\{m \cdot x\} = \{m \cdot \{x\}\}$ gilt.
Zunächst lösen wir den Fall $b = 0$. Wir betrachten die Folge $\{a\}, \{2a\}, \ldots, \{qa\}$. Das sind q Zahlen zwischen 0 und 1, also haben zwei davon einen Abstand von weniger als $\frac{1}{q}$ (sonst wäre ja der Abstand von der kleinsten und größten Zahl mindestens $q \cdot \frac{1}{q} = 1$). Sei nun $k \neq l$ solche Zahlen aus $\{1, \ldots, q\}$ mit $0 < \{ka\} - \{la\} < \frac{1}{q}$. Dann gilt auch $0 < \{(k - l)a\} < \frac{1}{q}$. Falls $k > l$, so haben wir schon eine Annäherung für $b = 0$ gefunden. Falls $k < l$, betrachten wir die Zahl $\{\lfloor \frac{1}{\{(k-l)a\}} \rfloor (l - k)a\}$.

Es gilt

$$\left\{\left\lfloor\frac{1}{\{(k-l)a\}}\right\rfloor(l-k)a\right\} = \left\{\left\lfloor\frac{1}{\{(k-l)a\}}\right\rfloor\{(l-k)a\}\right\} = \left\{\left\lfloor\frac{1}{\{(k-l)a\}}\right\rfloor(1-\{(k-l)a\})\right\} =$$
$$\left\{1-\left\lfloor\frac{1}{\{(k-l)a\}}\right\rfloor\{(k-l)a\}\right\} = 1-\left\lfloor\frac{1}{\{(k-l)a\}}\right\rfloor\{(k-l)a\} \in (0,\,\{(k-l)a\}),$$

da aus der Definition der Gaußklammer einerseits $1 > 1-\lfloor\frac{1}{\{(k-l)a\}}\rfloor\{(k-l)a\} > 0$ und andererseits $1-(\lfloor\frac{1}{\{(k-l)a\}}\rfloor+1)\{(k-l)a\} < 0$ folgt. Also haben wir hier ebenfalls eine Annäherung an $b = 0$ gefunden.
Für allgemeines $b \in (0, 1]$ nehmen wir nun eine Zahl $k > 0$ sodass $0 < \{ka\} < \frac{1}{q}$ und stellen fest, dass $\{\lfloor\frac{b}{\{ka\}}\rfloor ka\}$ eine passende Annäherung ist, weil ähnlich wie vorhin $0 < \lfloor\frac{b}{\{ka\}}\rfloor\{ka\} < 1$ und $\lfloor\frac{b}{\{ka\}}\rfloor\{ka\} \leq b < (\lfloor\frac{b}{\{ka\}}\rfloor+1)\{ka\}$ gilt.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2002 (nachzulesen in [1]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 2.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2003 (nachzulesen in [1]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2005 (nachzulesen in [1]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 4.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2007 (nachzulesen in [1]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 5.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2008 (nachzulesen in [1]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 6.

Gebietswettbewerb 2013 (nachzulesen in [2]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 7.

Bekannter Satz. Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Literatur

[1] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000-2008: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2018. Auflage 1.3.

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.