51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 05. Juni 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Greilhuber zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 02. Juni 2020 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Greilhuber bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 05. Juni 2020 von 14:00–15:30 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Im folgenden wollen wir noch einmal Aufgaben aus vergangenen Anfänger*innenwettbewerben besprechen, um auf den Junior-Regionalwettbewerb 2020 vorzubereiten.

Aufgabe 1. Zu jeder Seite eines Quadrats wird mit roter Farbe eine positive ganze Zahl geschrieben. Zu jedem Eckpunkt wird mit grüner Farbe das Produkt der beiden roten Zahlen geschrieben, die bei den angrenzenden Seiten stehen. Die Summe der grünen Zahlen sei 40.
Welche Werte sind für die Summe der roten Zahlen möglich?

Aufgabe 2. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit $x + y + xy = 3$. Man beweise, dass $x + y \geq 2$. Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 3. Es seien a und b zwei positive reelle Zahlen mit $a \leq 2b \leq 4a$. Man zeige, dass dann immer

$$4ab \leq 2(a^2 + b^2) \leq 5ab$$

gilt.

Aufgabe 4. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 5. Ein Briefträger will n Pakete mit Gewichten $1, 2, 3, \ldots, n$ in drei genau gleich schwere Gruppen aufteilen. Kann ihm das gelingen, falls

(a) $n = 2011$

(b) $n = 2012$

gilt?

Aufgabe 6. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit $AC = BC$. Auf dem Bogen CA seines Umkreises, der B nicht enthält, liege ein Punkt P. Der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade AP werde mit E bezeichnet, der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade BP werde mit F bezeichnet.
Man beweise, dass die Strecken AE und BF gleich lang sind.

Aufgabe 7. Gegeben sei eine Strecke AB. Wir errichten über und unter der Strecke AB die gleichseitigen Dreiecke ABC bzw. ADB. Wir bezeichnen die Mittelpunkte von AC und BC mit E bzw. F.
Man zeige, dass die Geraden DE und DF die Strecke AB in drei gleich lange Teile zerlegen.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Kann man den abstrakten Ausdruck für die Summe der grünen Zahlen faktorisieren? Verwende die Primfaktorzerlegung von 40.

Aufgabe 2: Erinnere dich an die Ungleichung $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, die für alle x, $y > 0$ gilt. In diesem Beispiel ist ein Beweis durch Widerspruch zielführend.

Aufgabe 3: Aus $b \leq 2a$ folgt $b - a \leq a$ *und* $2b - 2a \leq b$. Das reicht (fast) zum Beweis, Vorsicht aber beim Zusammenmultiplizieren von zwei Ungleichungen (Beispiel: $-1 < 1$ und $-3 < 2$, aber $(-1) \cdot (-3) > 1 \cdot 2$).

Aufgabe 4: Die Variable c kommt nur links vor. Überlege also zuerst, wann die linke Seite so klein wie möglich ist. Die arithmetisch-geometrische Ungleichung ist auch hier nützlich.

Aufgabe 5: Die Gaußsche Summenformel besagt $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Wann ist dieser Ausdruck durch 3 teilbar? Im Fall, dass eine solche Aufteilung möglich ist, versuche sie zu konkret zu finden und zu beschreiben.

Aufgabe 6: Der Peripheriewinkelsatz besagt, dass $\angle CAP = \angle CBP$. Suche nach kongruenten Dreiecken.

Aufgabe 7: Finde ähnliche Dreiecke mit parallelen Seiten und bekanntem Größenverhältnis, bzw. benutze den Strahlensatz.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Bezeichnen wir die roten Zahlen mit a, b, c und d, so erhalten wir als Ausdruck für die Summe der grünen Zahlen $ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d)$. Weil $a+c$ und $b+d$ ganze Zahlen ≥ 2 sind, ist $k := a+c$ ein Teiler von 40 zwischen 2 und 20, und $a+c+b+d = k+\frac{40}{k}$. Die in Frage kommenden Teiler von 40 sind 2, 4, 5, 8, 10, 20. Wir erhalten als mögliche Summen die Zahlen $\{22, 14, 13\}$, und jede dieser Zahlen wird tatsächlich angenommen, z.B. wenn (a, b, c, d) die Werte $(1, 1, k-1, \frac{40}{k}-1)$ annimmt.

Aufgabe 2.

Angenommen, es gelte $x + y \leq 2$. Nach der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt $1 \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, also auch $xy \leq 1$, mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y = 1$. Also gilt $x + y + xy \leq 3$, mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y = 1$. Im Umkehrschluss gilt also $x + y \geq 2$ wenn $x + y + xy \geq 3$, mit Gleichheit genau dann wenn $x = y = 1$.

Aufgabe 3.

Die linke Ungleichung ist immer erfüllt, da $0 \leq 2(a-b)^2 = 2(a^2+b^2) - 4ab$ für alle reellen Zahlen a, b gilt. Die Nebenbedingung ist äquivalent zu $a \leq 2b$ und $b \leq 2a$, ist also eigentlich symmetrisch in a und b, genauso wie die Ungleichung selbst. Damit dürfen wir o.B.d.A annehmen, dass $a \leq b$ gilt. Aus $b \leq 2a$ folgt sowohl $b - a \leq a$ als auch $2b - 2a = b + (b - 2a) \leq b$, und da $b - a$ positiv ist, können wir die zwei Ungleichungen miteinander multiplizieren und erhalten $2(b-a)^2 \leq ab$, was mit der binomischen Formel äquivalent zu $2(b^2 + a^2) \leq 5ab$ ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn $b = 2a$ gilt. Falls $b \leq a$, so tritt der Gleichheitsfall bei $a = 2b$ ein.

Aufgabe 4.

Nach der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$. Ebenso nach AM-GM gilt $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \geq 2\sqrt{a^2b^0} = 2a$, also $(a+b)\sqrt{\frac{a}{b}} \geq 2a$, womit insgesamt

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \geq \frac{4a}{a+b}$$

folgt, mit Gleichheit genau dann, wenn $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ und $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$. Die letztere Bedingung ist äquivalent zu $a = b$, und damit folgt aus der ersteren $a = b = c$ als einziger Gleichheitsfall.

Aufgabe 5.

Da das Gesamtgewicht $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ im Fall $n = 2011$ nicht durch 3 teilbar ist, kann es eine solche Aufteilung in Fall (a) nicht geben. Für den Fall (b) bemerken wir zunächst, dass man neun aufeinanderfolgende Zahlen $k+1$, $k+2$, $\ldots$, $k+9$ in drei Mengen mit gleicher Summe aufteilen kann, nämlich in $A = \{k+1, k+5, k+9\}$, $B = \{k+2, k+6, k+7\}$ und $C = \{k+3, k+4, k+8\}$, jede mit Summe $3k + 15$. Weil $2012 - 5$ durch 9 teilbar ist, kann die Menge $\{6, 7, 8, \ldots, 2012\}$ in disjunkte Mengen von je neun aufeinanderfolgenden Zahlen aufgeteilt werden. Wir teilen nun jede dieser wie vorhin beschrieben in drei Teile mit gleicher Summe auf und fassen die entsprechenden Teile zu drei großen Mengen zusammen. Die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kann in $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ und $\{5\}$

aufgeteilt werden. Fügen wir den drei großen Mengen von vorher nun diese drei Mengen entsprechend hinzu, haben wir die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ in drei Mengen von gleicher Summe aufgeteilt.

Aufgabe 6.

Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle CAP = \angle CBP$. Damit haben die Dreiecke ACE und BCF jeweils einen rechten Winkel und den Winkel $\angle CAE = \angle CBF$ gemeinsam, und da sie auch in der Hypotenusenlänge $|CA| = |CB|$ übereinstimmen, sind sie kongruent. Es folgt $|AE| = |BF|$.

Aufgabe 7.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von DE und AB mit X. Dann sind die Dreiecke AXE und BXD ähnlich, da sie zwei Seiten teilen und die jeweils dritten Seiten parallel zueinander sind. Nach der Abgabe gilt $|AE| : |BD| = 1 : 2$, also folgt $|AX| : |XB| = 1 : 2$, äquivalent $|AX| = \frac{1}{3}|AB|$. Analog folgt auch $|YB| = \frac{1}{3}|AB|$ für den Schnittpunkt Y von DF und AB, und damit zuletzt $|XY| = \frac{1}{3}|AB|$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2009 (nachzulesen in [2]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 2.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2011 (nachzulesen in [2]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2012 (nachzulesen in [2]).

Aufgabe 4.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2018, (siehe [1]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 5.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2012 (nachzulesen in [2]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 6.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2011 (nachzulesen in [2]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 7.

Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2012 (nachzulesen in [2]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team.

Literatur

[1] Junior-Regionalwettbewerb 2018. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/440`. (aufgerufen am 07.06.2020).

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.