51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 12. Juni 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic und Josef Greilhuber zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 09. Juni 2020 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 12. Juni 2020 von 14:00–15:30 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Gegeben seien 101 Punkte auf einer Geraden und 20 Punkte auf einer dazu parallelen Geraden. Wie viele Geraden gibt es, auf denen genau zwei solche Punkte liegen?

Aufgabe 2. Wie viele Diagonalen hat ein konvexes Viereck, Fünfeck, Sechseck? Wie viele hat ein allgemeines n-Eck?

Aufgabe 3. Wir betrachten n Geraden in der Ebene, sodass keine drei durch einen gemeinsamen Punkt gehen und keine zwei parallel sind. Wie viele Schnittpunkte von Geraden gibt es insgesamt?

Aufgabe 4. Gegeben sei ein 9×9-Schachbrett. Eine Spielfigur fängt im linken oberen Feld an und darf sich in jedem Schritt ein Feld nach rechts oder unten bewegen. Wie viele mögliche Pfade zum rechten unteren Feld kann die Spielfigur nehmen?

Aufgabe 5. Wir betrachten ein 9×9-Schachbrett und eine Spielfigur wie im vorigen Beispiel. Wie groß ist der Anteil der erlaubten Pfade, die von links oben nach rechts unten gehen, und die über das Feld ganz in der Mitte des Schachbretts gehen?

Aufgabe 6. Wir betrachten ein $2\times n$-Rechteck. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Rechteck mit 2×1-Dominosteinen auszulegen? Dabei müssen die Dominos alles überdecken und dürfen einander nicht überlagern.

Aufgabe 7. Wir betrachten ein regelmäßiges n-Eck $A_1A_2\ldots A_n$. Der Winkel $\angle A_3A_1A_4$ ist $9°$. Wie viele Diagonalen hat das n-Eck?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 2: Erinnere dich an die Gaußsche Summenformel $1 + 2 + \ldots + n = \ldots$

Aufgabe 3: Vergleiche diese Aufgabe mit Aufgabe 1.

Aufgabe 4: Die Figur muss sich 16 Mal bewegen, davon genau acht mal nach unten und acht Mal nach rechts.

Aufgabe 5: Teile die Pfade in zwei erlaubte Pfade in 5×5-Schachbrettern auf.

Aufgabe 6: Führe mittels einer Fallunterscheidung jede Belegung auf eine Belegung entweder eines $2{\times}(n{-}1)$-Ecks oder eines $2{\times}(n{-}2)$-Ecks zurück. Die entstehende *rekursive* Beziehung definiert die sehr bekannten *Fibonacci*-Zahlen.

Aufgabe 7: Der *Peripheriewinkelsatz* besagt, dass $\angle A_3A_1A_4$ gleich dem Winkel $\angle A_3A_2A_4$ ist – das ist genug Information, um das n-Eck zu bestimmen.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic und Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Es gibt 101 Möglichkeiten den ersten Punkt auszuwählen und 20 den zweiten Punkt auszuwählen. Insgesamt ergibt das $101 \cdot 20 = 2020$ Möglichkeiten zwei Punkte auszuwählen (zwei Punkte definieren eine Gerade).

Aufgabe 2.

Jeder Eckpunkt liegt auf genau $n-3$ Diagonalen, denn eine Diagonale, die diesen Punkt enthält, enthält einen weiteren Punkt des n-Ecks (außer sich selbst oder einen der beiden benachbarten Eckpunkte). Jede diese Diagonale zählen wir 2 Mal. Insgesamt ergibt das $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ Diagonalen.

Aufgabe 3.

Jedes Geradenpaar hat genau einen Schnittpunkt. Insgesamt gibt es $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Paare von Geraden (n über 2).

Aufgabe 4.

Ingesamt muss die Figur 18 Schritte machen, davon 8 nach unten und 8 nach rechts. Wir wählen die (8) Positionen bei denen wir nach unten gehen und bei den übrigen (8) Positionen gehen wir nach rechts. Für diese Wahl gibt es 16 über 8 Möglichkeiten, also $\frac{16!}{8!\cdot 8!} = 12870$ (Die Anzahl der Möglichkeiten, 8 aus 16 Positionen auszuwählen).

Aufgabe 5.

Wir teilen die Pfade in zwei 5×5-Schachbretter auf. Jetzt sollen wir Aufgabe 4 zwei Mal anwenden (für Schachbretter der Größe 5×5). Denn wir schreiten von links oben zum Feld in der Mitte des Schachbretts und von dort zur rechten unteren Ecke. (Die Mitte ist dabei die Position rechts unten im ersten 5×5-Schachbrett und die erste Position, links oben, im zweiten 5×5-Schachbrett). Insgesamt ergibt das also $\left(\frac{8!}{4!\cdot 4!}\right)^2 = 4900$ Möglichkeiten, der Anteil ist $\frac{4900}{12870} = \frac{490}{1287}$. (Dabei ist die Zahl im Nenner die Anzahl aller möglichen Pfade, die wir in Aufgabe 4 bestimmt haben).

Aufgabe 6.

Sei $F(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten ein n-Eck zu belegen. Wir unterscheiden 2 Fälle.
Der erste Fall: Der Dominostein ganz links liegt vertikal. In diesem Fall ist die Anzahl der Möglichkeiten das n-Eck zu belegen gleich der Anzahl der Möglichkeiten ein $2\times(n-1)$-Rechteck (das ursprüngliche n-Eck minus das linke 2×1-Rechteck) zu belegen.
Der zweite Fall: Der Dominostein links oben liegt horizontal. Dann müssen wir noch einen Dominostein genau darunter legen. Wenn wir jetzt die 2 Dominos entfernen, bleibt noch ein $2\times(n-2)$-Rechteck übrig. In diesem Fall ist die Anzahl der Möglichkeiten, das $2\times n$-Rechteck zu belegen, gleich der Anzahl der Möglichkeiten ein $2\times(n-2)$-Rechteck zu belegen.
Deswegen ist die Anzahl aller Belegungen eines $2\times n$-Rechtecks mit Dominosteinen gleich

$$F(n-1) + F(n-2),$$

wobei $F(1) = 1$ und $F(2) = 2$. Die Glieder dieser Folge heißen Fibonacci Zahlen.

Aufgabe 7.

Der Peripheriewinkelsatz besagt, dass der Winkel $\angle A_3A_2A_4 = \angle A_3A_1A_4 = 9°$. Da das Dreieck $A_2A_3A_4$ gleichschenklig ist, ist $\angle A_2A_3A_4 = 180° - 2 \cdot 9° = 162°$. Daraus folgt, dass der Außenwinkel dieses n-Ecks gleich $180° - 162° = 18°$ ist und daher ist $18° = \frac{360°}{n}$. Somit gilt $n = 20$ und die Anzahl der Diagonalen ist nach Aufgabe 2 gleich $\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 170$

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

von Nina Mitrovic und Josef Greilhuber bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 2.

Bekannte Tatsache, formuliert von Nina Mitrovic und Josef Greilhuber bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.

Bekanntes Beispiel, formuliert von Nina Mitrovic und Josef Greilhuber bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 4.

Bekanntes Beispiel, formuliert von Nina Mitrovic und Josef Greilhuber bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 5.

von Nina Mitrovic und Josef Greilhuber bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 6.

Bekanntes Beispiel, formuliert von Nina Mitrovic und Josef Greilhuber bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 7.

Regionalwettbewerb Kroatien 2016 (siehe [1]).

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb 2016. `http://www.iccg.co.me/1/index.php?option=com_content&view=article&id=769`. (aufgerufen am 15.06.2020).