51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 19. Juni 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Greilhuber und Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 16. Juni 2020 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Greilhuber bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 19. Juni 2020 von 14:00–15:30 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

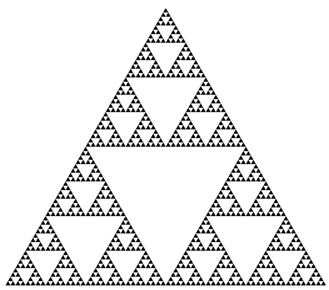
Das *Pascal'sche Dreieck* ist ein Schema von Zahlen, die wie in der folgenden Abbildung angeordnet sind: Links und rechts stehen Einser, jede andere Zahl ist die Summe der beiden Zahlen links und rechts darüber. Wir stellen uns dieses Dreieck *unendlich weit* fortgesetzt vor.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&& \\
&&&&1&&1&&&& \\
&&&1&&2&&1&&& \\
&&1&&3&&3&&1&& \\
&1&&4&&6&&4&&1& \\
1&&5&&10&&10&&5&&1
\end{array}$$

Aufgabe 1. Zeige, dass die Summe jeder Zeile ab der zweiten das Doppelte der Summe der darüberliegenden Zeile ist.

Aufgabe 2. Zeichne ein Pascal'sches Dreieck bis zur sechzehnten Zeile – wobei der oberste Einser als nullte Zeile gilt – und markiere alle ungeraden Zahlen.

Vergleiche das Ergebnis mit der Abbildung des *Sierpinski-Dreiecks* rechts. Überzeuge dich davon, dass für *jede* Zweierpotenz 2^n die (2^n-1)-te Zeile nur ungerade Zahlen enthalten würde.



Wir bezeichnen nun den k-ten Eintrag in der n-ten Zeile mit $\binom{n}{k}$. Es gilt dann also $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ und so weiter.

Aufgabe 3. Beweise die *Hockey-Stick-Regel*: Teilsummen der Spalten des Pascal'schen Dreieck sind immer in der nächsten Spalte, eins weiter unten zu finden, also

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Aufgabe 4. Die Zahl $\binom{n}{k}$ gibt auch die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten an, aus einer Menge von n verschiedenen Dingen genau k davon auszuwählen. Überzeuge dich davon, dass für diese Anzahl dieselbe Regel wie für die Einträge des Pascal'schen Dreiecks gilt, nämlich

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Zusammen mit der Tatsache, dass man kein Ding sowie alle Dinge in einer Menge von n Dingen jeweils nur auf eine Möglichkeit auswählen kann (indem man eben keins bzw. alles nimmt) beweist das schon, dass $\binom{n}{k}$ die gesuchte Anzahl ergibt.

Aufgabe 5. Zeige die *Identität von Vandermonde*:

$$\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Aufgabe 6. Wir definieren $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ für jede positive ganze Zahl. Nun betrachten wir die Zahlen $C(n, k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Zeige, dass auch für diese Zahlen gilt:

$$C(n, 0) = C(n, n) = 1 \text{ und } C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k) \text{ für } n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n-1.$$

Damit folgt also

$$\binom{n}{k} = C(n, k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Aufgabe 7. Zeige, dass für jede Primzahl p und jede Zahl k zwischen 1 und $p-1$ der Eintrag $\binom{p}{k}$ durch p teilbar ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Jede Zahl in der Zeile darüber „steckt“ gewissermaßen in zwei Zahlen der nächsten Zeile, nämlich in der links und der rechts daneben.

Aufgabe 2: Bei jeder Zweierpotenz 2^n scheint das Muster „neu zu starten“, und zwar zwei Mal. Eine Weile lang berühren die zwei entstehenden Dreiecke einander nicht – wie lang genau?

Aufgabe 3: Gehe rückwärts vor: Spalte $\binom{n+1}{k+1}$ auf in $\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$, und $\binom{n}{k+1}$ wieder in $\binom{n-1}{k+1}+\binom{n-1}{k}$, und so weiter.

Aufgabe 4: Betrachte ein bestimmtes Element in der Menge der n Dinge. Unterscheide nun, ob dieses Element unter den k ausgewählten Elementen ist oder eben nicht.

Aufgabe 5: Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Teile die Menge von $2n$ Elementen in zwei Mengen zu jeweils n Elementen auf: Um aus den $2n$ Dingen n auszuwählen, können wir z.B. keins aus der ersten Menge, und n aus der zweiten auswählen, oder eins aus der ersten, $n-1$ aus der zweiten, und so weiter.

Aufgabe 6: Hebe alle Faktoren heraus, die sowohl in $C(n-1, k-1)$ als auch in $C(n-1, k)$ vorkommen. Dann geht es nur mehr darum, die Brüche in der Klammer korrekt zu addieren.

Aufgabe 7: Wenn ein Bruch $\frac{A}{B}$ ganzzahlig ist, und eine Primzahl p den Zähler A, aber nicht den Nenner B teilt, dann teilt p auch $\frac{A}{B}$.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Greilhuber und Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Jede Zahl aus der n-ten Zeile befindet sich in genau zwei Zahlen in darunter liegenden Zeile (in der Zahl unten links und rechts). Deswegen ist die Summe in der $(n+1)$-sten Zeile gleich zwei mal die Summe in der n-ten Zeile.

Aufgabe 2.

In der zweiten Zeile kommen nur ungerade Zahlen vor, also gibt es in der dritten Zeile genau 2 ungerade Zahlen geben, da die Summe von je zwei ungeraden Zahlen gerade ist, und an Rändern haben wir zwei Einser. In der vierten Zeile haben wir dann genau vier ungerade Zahlen, durch die beiden neuen Einser am Rand und die Summe der jeweiligen 1 aus der oberen Zeile und den geraden Zahlen daneben. Man kann so weiter machen und man sieht, dass in der $(n+1)$-sten Zeile genau 2 ungerade Zahlen mehr stehen, als in der vorherigen Zeile. Starten wir in der 2^n-ten Zeile, stehen demnach nach 2^n Schritten (d.h. in der $2^{(n+1)}$-sten Zeile) wieder nur ungerade Zahlen.

Aufgabe 3.

Nach der Definition ist $\binom{n}{k+1}$ gleich $\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$. Dann ist auch $\binom{n-1}{k+1}$ gleich $\binom{n-2}{k+1} + \binom{n-2}{k}$. Diese Gleichungen ergeben insgesamt

$$\binom{n-2}{k+1} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

Wir können so weiter machen (jedes mal haben wir einen Summanden mehr, und er entsteht indem wir den Summanden mit dem unteren Eintrag $k+1$ in zwei neue Summanden teilen, wie im ersten Schritt) solange der obere Eintrag von diesem Summanden mindestens k ist. Am Ende erhalten wir die gewünschte Gleichung

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Hinweis: Die Gleichung hat ihren Namen durch die graphische Darstellung im Pascal'schen Dreieck bekommen. Markiert man alle Einträge der linken Seite der Gleichung, so startet man bei einem der Einser auf der rechten Seite des Dreiecks und markiert dann die weiteren schräg darunter liegenden, bis man $(n-k)$ Einträge markiert hat. Die Summe all dieser Werte ist dann der vom letzten markierten Eintrag aus gesehen rechte untere Nachbar.

Als Beispiel wählen wir $k = 2$ und $n = 4$.
Die linke Seite der Gleichung ist grün markiert, die rechte Seite blau. Insgesamt erinnert die Form aller markierten Einträge an einen Hockey-Schläger.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Aufgabe 4.

Wir wollen genau k verschiedene Dinge auswählen. Betrachten wir ein bestimmtes Element, dann können wir es entweder nehmen oder nicht nehmen. Falls wir es nehmen, müssen wir noch $(k-1)$ Dinge aus den restlichen $(n-1)$ Dingen auswählen (Es gibt $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten, das zu tun). Falls wir es nicht nehmen, müssen wir wieder genau k Dinge aus den restlichen $(n-1)$ Dingen auswählen (Es gibt $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten, das zu tun). Insgesamt ergibt das:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Aufgabe 5.

Wir teilen die $2n$-elementige Menge in zwei Mengen auf. Die Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente von diesen $2n$ Elementen auszuwählen, ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten aus der ersten Menge x und aus der zweiten Menge noch n–x Elemente auszuwählen (Die Anzahl der Möglichkeiten das zu tun, für ein fixiertes x ist dann genau $\binom{n}{x} \cdot \binom{n}{n-x} = \binom{n}{x}^2$) Da+$x$ jede Zahl zwischen+1 und+n sein kann, ist

$$\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Aufgabe 6.

Aus technischen Gründen setzen Mathematiker fest, dass $0! = 1$ gilt. Dies ist auch für diese Aufgabe nützlich.
Mit dieser Bezeichnung gilt

$$C(n,0) = C(n,n) = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

Wir müssen zeigen, dass

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k),$$

was nach Definition äquivalent ist zu

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k+1)! \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! \cdot k!}.$$

Wir multiplizieren diese Formel mit $\frac{(n-k-1)! \cdot (k-1)!}{(n-1)!}$ und erhalten

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k} = \frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Nenner der linken Seite, erhalten wir die offensichtlich wahre Aussage

$$n = k + (n-k).$$

Aufgabe 7.

Da $k < p$ ist, ist auch $p - k < p$, und weil p prim ist, teilt p die Zahl $k!(p-k)$ nicht (Alle Primfaktoren von $k!(p-k)!$ sind kleiner als p). Da p offenbar $p!$ teilt, ist $\binom{(}{p}, k) = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ auch durch p teilbar (Der Zähler ist teilbar durch p und der Nenner nicht).

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 2.

Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.

Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 4.

Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 5.

Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 6.

Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 7.

Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team.