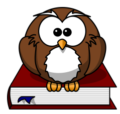
AUFGABENSAMMLUNG FÜR DEN STUDIENBEGINN BSC & BED AN DER FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Inhaltsverzeichnis



Datum: 15. Juli 2021.

1. Einleitung

Forschende haben alle gemeinsam, dass sie sich selbst und einander unentwegt Fragen stellen, die sie dann auf Jahre verdattern. Ist dann endlich eine Frage beantwortet, werfen sie sich leidenschaftlich auf die nächste. In den Disziplinen der Ver- und Entdatterung leisten Mathematik-Forschende seit Jahrtausenden Pionierarbeit. Sie haben ebenso das Fundament für die modernen Naturwissenschaften geschaffen wie für die Wirtschaftswissenschaft, die empirische Sozialforschung oder die Informations- und Kommunikationstechnologie – ganz zu schweigen von ihren bahnbrechenden Leistungen in der Logik, der Medizin und sogar der Metaphysik. Die Mathematik blickt zuversichtlich in die Zukunft: Es besteht kein kein Zweifel, dass das 21. Jahrhundert ein ausgesprochen mathematisches sein wird.

Wir freuen uns, dass du dich zu einem der beiden Grundstudien

– Bachelor of Science
– Bachelor of Education

an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien entschieden hast. Herzlich willkommen!

Wir denken viel nach, wie wir deine Freude an der Mathematik und der Arbeit mit jungen Menschen fördern und dich hervorragend ausbilden können. Dein Studienbeginn ist durch die vielen Möglichkeiten und Herausforderungen, die er unweigerlich mit sich führt, eine aufregende Zeit. Wir bitten dich, dass du unsere Unterstützungsangebote annimmst, insbesondere während der intensiven Studieneingang- und Orientierungsphase (StEOP). Es liegt viel Arbeit vor uns.

Wir haben in diesem Dokument Aufgaben zu den Inhalten der StEOP für dich zusammengestellt. *Unsere Absicht dabei war nicht, typische Prüfungsfragen zu sammeln.* Allerdings schätzen wir aus Erfahrung, dass dich die gewissenhafte Beschäftigung mit solchen Aufgaben – zum Beispiel in den regelmäßig dafür angebotenen Tutorien – auch gut auf deine ersten Prüfungen bei uns vorbereitet.

Die Mathematik ist nicht marktschreiend. Dass es in Österreich mittlerweile salonfähig geworden ist, die Mathematik zu belächeln, ist bedauerlich und zutiefst verantwortungslos. An Entwicklungsgrad und universeller Bedeutung gemessen ist die Mathematik gewiss die mit Abstand am wenigsten lächerliche Wissenschaft. Du triffst mit deiner Studienwahl eine tolle, zukunftssichere Entscheidung. Es lohnt sich, dass du dich dafür ordentlich anstrengst.

Viele Mitglieder der Fakultät – alle selbst einmal am Studienbeginn – haben zu dieser Sammlung beigetragen. Herzlichen Dank euch allen dafür! Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

Roland Donninger, Studienprogrammleiter
Michael Eichmair, Projekt Mathematik macht Freu(n)de
Günther Hörmann, Vize-Dekan für Lehre

2. AUFGABEN

2.1. Mathematische Sprache und Denkweise.

2.1. Formuliere die Verneinung der gegebenen Aussage.

a) Alle Babies sind niedlich.
b) Zwei Personen im Raum haben heute Geburtstag.
c) Alle Anwesenden sprechen Deutsch oder Englisch.

2.2. Kommt Alex zum Spieleabend, dann kommt auch Berni. Wenn Charlie nicht kommt, dann kommt Alex ganz sicher, aber Berni bestimmt nicht. Mit wem von den Dreien ist beim Spieleabend auf jeden Fall zu rechnen?

2.3. Wir bilden das Produkt von mehreren natürlichen Zahlen.
Wie groß kann das Produkt höchstens sein, wenn die Summe der Faktoren 100 ist?

2.4. Wenn bei Division durch 7 bei n der Rest 3 bleibt und bei m der Rest 4, welcher Rest bleibt dann bei i) $n + m$ ii) $n \cdot m$ bei Division durch 7?

2.5. In dieser Aufgabe denken wir über Restklassen nach.

a) Gibt es ganze Zahlen a und b, sodass $14 \cdot a - 91 \cdot b = 1$? Tipp: Denke über Teiler von $14 \cdot a - 91 \cdot b$ nach.
b) Die ganze Zahl n lässt Rest i) 0 ii) 1 iii) 2 iv) 3 bei Division durch 4.
Welchen Rest lässt n^2 bei Division durch 4? Beachte, dass manche Reste nicht auftreten.
c) Gibt es ganze Zahlen k und ℓ, sodass $k^2 + \ell^2$ den Rest 2 bei der Division durch 4 lässt?
d) Die ganze Zahl n lässt Rest i) 0 ii) 1 iii) 2 iv) 3 v) 4 vi) 5 vii) 6 bei Division durch 7.
Welchen Rest lässt n^2 bei Division durch 7? Beachte, dass alle denkbaren Reste auftreten.

2.6. Wahr oder falsch?
Belege deine Entscheidung mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

a) Wenn n durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist n durch $6 = 2 \cdot 3$ teilbar.
b) Wenn n durch 4 und durch 6 teilbar ist, dann ist n durch $24 = 4 \cdot 6$ teilbar.
c) Wenn n durch 14 und durch 15 teilbar ist, dann ist n durch $210 = 14 \cdot 15$ teilbar.

Tipp: Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

2.7. Beweise die gegebene Aussage.

a) Wir vermehren das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen um eins.
Das Ergebnis ist bestimmt durch 4 teilbar.
b) Wir bilden das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen.
Das Ergebnis ist bestimmt durch 8 teilbar.

c) Wir ziehen eine natürliche Zahl von ihrer dritten Potenz ab.
Das Ergebnis ist bestimmt durch 6 teilbar.

d) Wir ziehen eine natürliche Zahl von ihrer fünften Potenz ab.
Das Ergebnis ist bestimmt durch 30 teilbar.

e) Wir bilden das Produkt von zehn aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.
Das Ergebnis ist bestimmt durch $10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10$ teilbar.

Tipp: Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

2.8. Setze die Reste aus $\{0, 1, 2, 3\}$ ein, die jeweils bei der Division durch 4 bleiben.

a)

$+$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

b)

$\cdot$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

2.9. Setze die Reste aus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ein, die jeweils bei der Division durch 7 bleiben.

a)

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

b)

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

2.2. **Index-, Summen- und Produktschreibweise.**

2.10. Schreibe mithilfe des Summenzeichens:

a) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

b) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$

c) $\ln(1) + 3\ln(3) + 5\ln(9) + 7\ln(27) + 9\ln(81)$

d) $1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-n}$

e) $1 + 3 + 5 + \ldots + 27$

f) $1 - 2 + 3 - \ldots + 9 - 10$

2.11. Verwende Summen- und Produktschreibweise, um die gegebene Identität kompakt darzustellen.

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot n - 1) = n^2$

b) $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

c) $(1 + x^2) \cdot (1 + x^4) \cdot (1 + x^8) \cdot \ldots \cdot (1 + x^{(2^n)}) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots + x^{(2^{n+1}-2)}$

d) $\exp(a_1) \cdot \exp(a_2) \cdot \ldots \cdot \exp(a_n) = \exp(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

2.12. In dieser Aufgabe interessieren wir uns für die folgenden Identitäten:

i) $\sum_{k=0}^{n} \prod_{\ell=0}^{1} (k + \ell) = \frac{1}{3} \cdot \prod_{i=0}^{2} (n + i)$ ii) $\sum_{k=0}^{n} \prod_{\ell=0}^{2} (k + \ell) = \frac{1}{4} \cdot \prod_{i=0}^{3} (n + i)$

a) Schreibe die Identität ohne Verwendung von Summen- und Produktzeichen.

b) Prüfe durch Rechnung von Hand, dass die gegebene Identität für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ richtig ist.

Hast du eine Vermutung für zwei weitere Identitäten dieser Bauart? Prüfe deine Vermutung für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

2.13. Im Raum steht die Behauptung, dass die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n + 1)! - 1 \tag{1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt. Mica hat mit dem Taschenrechner die Gültigkeit der Formel (1) für $n = 1365$ nachgerechnet. Weise nach, dass die Formel (1) auch für $n = 1366$ gilt. Dabei darfst du dich darauf verlassen, dass Mica richtig gerechnet hat.

2.14. Im Raum steht die Behauptung, dass die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k + 1)} = 1 - \frac{1}{n + 1} \tag{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.

a) Erkläre ohne Verwendung des Summensymbols, was die Formel im Fall $n = 2019$ besagt.

b) Weise ohne Taschenrechner nach, dass die Formel (2) für die Werte $n = 1, 2, 3, 4, 5$ gilt.

c) Dima hat mit einem Supercomputer die Gültigkeit der Formel (2) für alle n bis einschließlich $n = 42^{42}$ nachgerechnet. Weise du ohne Supercomputer nach, dass die Formel auch für $n = 42^{42} + 1$ gilt. Du darfst dich dabei darauf verlassen, dass Dima richtig gerechnet hat.

d) ☆ Ermittle die Zahl der Stellen von 42^{42} mit einem einfachen wissenschaftlichen Taschenrechner.

e) Sei $N \in \mathbb{N}^*$ beliebig aber fest. Es ist bekannt, dass die Formel (2) für $n = N$ gilt. Weise nach, dass die Formel (2) dann bestimmt ebenso für die nächstgrößere Zahl, also für $n = N + 1$, gilt.

2.15. Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ und alle a, $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(a^{n-k} \cdot b^k\right) \tag{3}$$

Bemerkung: Die Identität (3) ist merkenswert. Spezialfälle wie die binomischen Formeln

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b) \cdot (a+b) \\ a^3 - b^3 &= (a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a+b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2) \end{aligned}$$

oder die geometrische Summenformel

$$1 + q + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \qquad q \neq 1$$

verwenden wir ständig. Die Identität (3) gilt übrigens in allen „kommutativen Ringen“. Mehr dazu später. □

2.3. Beweismethoden (Induktion, direkt, indirekt).

2.16 (Eine Warnung von Oscar Perron)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ die größte natürliche Zahl. Angenommen, $n > 1$. Indem wir beide Seiten mit n multiplizieren sehen wir, dass n^2 größer als n ist. Weil n nun aber schon die größte natürliche Zahl ist, sehen wir ein, dass die Annahme $n > 1$ falsch ist. Das heißt, $n = 0$ oder $n = 1$. Nun ist $1 > 0$. Also ist 1 die größte natürliche Zahl. *Oder doch nicht?*

2.17. Welche Idee liegt den folgenden Abschätzungen zugrunde?

i) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$ ii) $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}$ iii) $\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{2}$

Tipp: Konzentriere sich auf den jeweils kleinsten Summanden.

Nun bist du an der Reihe.

a) Zeige, dass $\sum_{k=1}^{42} \frac{1}{k} \geq 3$.
b) Ermittle (mit Begründung) ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 42$ gilt.

Die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

2.18. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (2 \cdot k + 1) = (n+1)^2$$

2.19. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+n}{2^n}$$

2.20 (Bernoulli Ungleichung)**.** Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass gilt:

$$1 + n \cdot x \leq (1+x)^n$$

Wann gilt Gleichheit?

2.21. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Die Ermittlung des Wertes von $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist als das Basler Problem bekannt und ist Leonhard Euler 1735 gelungen: $s = \frac{\pi^2}{6}$.

2.22. Zeige, dass $2^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2.23. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die Ungleichung $n^2 + n + 1 > 3^n$ erfüllt?

2.24. Es existiert ein Polynom $p(x)$ vom Grad d mit der beschriebenen Eigenschaft.

a) $p(n) = \sum_{k=1}^{n} k$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $d = 2$
b) $p(n) = \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $d = 2$
c) $p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $d = 3$
d) $p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $d = 4$

Ermittle so ein Polynom, indem du einen Ansatz machst und dann an speziellen Stellen auswertest. Beweise mithilfe von Induktion, dass dein Polynom auch wirklich die beschriebene Eigenschaft hat.

2.25. Sei $\ell \in \mathbb{N}$. Unser Ziel hier ist, die Gültigkeit folgender Formel für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ zu beweisen:

$$\prod_{k=1}^{n} [\, k \cdot (k + \ell) \,] = \frac{n! \cdot (n + \ell)!}{\ell!}$$

a) Schreibe die Formel ohne Verwendung des Produktzeichens.
b) Prüfe die Gültigkeit der Formel durch direkte Rechnung wenn $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
c) Beweise die allgemeine Gültigkeit der Formel durch vollständige Induktion.
d) Formuliere und beweise eine analoge Formel für das folgende Produkt:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k + \ell}$$

2.26. Die Folge (c_n) erfüllt die folgende Rekursionsvorschrift:

$$c_{n+1} = (42 \cdot c_n)^{42}$$

Zeige, dass es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$c_n = a \cdot b^{(42^n)}$$

2.27 (Hockey-Stick-Rule)**.** Seien $n, \ell \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \ell$. Zeige, dass gilt:

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1} \tag{4}$$

Veranschauliche diesen Zusammenhang im Pascalschen Dreieck.

Bemerkung: Aus der Hockey-Stick-Rule (4) folgen witzige Summenformeln, z.B.:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\cdot n=\frac{1}{3}\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$$
$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+(n-2)\cdot(n-1)\cdot n=\frac{1}{4}\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$$

Mit wenig Arbeit lassen sich daraus dann Summenformeln für

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\ell}$$

gewinnen. Diese Einblicke gehen auf Jakob Bernoulli zurück. □

2.28. Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\frac{2}{3}\cdot n<\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}<\frac{2}{3}\cdot n+1$$

2.4. **Grundlagen der Aussagenlogik.**

2.29. Zeige mithilfe von Wahrheitstabellen: **a)** $(a \implies b) = (\neg\, b \implies \neg\, a)$ **b)** $(\neg\,(\neg\, a)) = a$

2.30 (Dichotomie und Trichotomie)**.**
Seien A, B, C drei einstellige Prädikate auf der Grundmenge X. Betrachte die folgenden Aussagen:

i) $\forall x \in X\colon \ \big([A(x) \wedge \neg\, B(x)] \vee [\neg\, A(x) \wedge B(x)]\big)$
ii) $\forall x \in X\colon \ \big([A(x) \wedge \neg\, B(x) \wedge \neg\, C(x)] \vee [\neg\, A(x) \wedge B(x) \wedge \neg\, C(x)] \vee [\neg\, A(x) \wedge \neg\, B(x) \wedge C(x)]\big)$

2.31. Löse die *doppelte Verneinung* auf.

a) $\neg\,(2 \nmid 2^5)$
b) $\neg\,(1 \notin \mathbb{N})$
c) $\neg\,(-2 \notin \mathbb{Z})$
d) $\nexists x \in \mathbb{P} : 1 \nmid x$
e) $\nexists n \in \mathbb{N} : n^2 \notin \mathbb{N}$
f) $\neg\,(\forall x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q})$
g) $\neg\,(\forall x \in \mathbb{R} : \neg\,(x^2 < 0))$

a) Formuliere die jeweilige Aussage unmissverständlich als Satz in einer deiner Zweitsprachen.
b) Gib zwei Alltagsbeispiele für Grundmenge und Prädikate an, auf die die jeweilige Aussage zutrifft.

2.32. Zeige mithilfe von Wahrheitstabellen:

a) $(a \vee b) = ((\neg\, a) \implies b)$
b) $(a \wedge b) = (\neg\,(a \implies \neg\, b))$
c) $(a \iff b) = ((a \implies b) \wedge (b \implies a))$

Es folgt, dass die logischen Verknüpfungen alleine durch $\neg$ and $\implies$ ausgedrückt werden können.

2.33. Ermittle, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist.

a) $\forall\, p \in \mathbb{P}\, \exists\, q \in \mathbb{P} :\ p \mid q$
b) $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, p \in \mathbb{P} :\ p \mid n$
c) $\forall\, p \in \mathbb{P}\, \exists\, n \in \mathbb{N} :\ n \mid p$
d) $\forall\, p \in \mathbb{P}\, \forall\, q \in \mathbb{P} :\ [\, p \mid q \implies p = q\,]$
e) $\forall\, r \in \mathbb{Q}\, \exists\, p \in \mathbb{P}\ : r \cdot p \in \mathbb{Z}$
f) $\forall\, p \in \mathbb{P}\, \forall\, m,\, n \in \mathbb{Z} :\ [\, p \mid m \cdot n \implies (p \mid m \,\vee\, p \mid n)\,]$
g) $\forall\, m,\, n \in \mathbb{Z}\ :\ [\, m \text{ gerade} \implies m \cdot n \text{ gerade}\,]$
h) $\forall\, p \in \mathbb{P}\, \exists\, q \in \mathbb{P} :\ q > p$
i) $\forall\, p \in \mathbb{P}\, \exists\, q \in \mathbb{P} :\ p > q$
j) $\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{R} : [\, (y \neq 0 \,\wedge\, z \neq 0) \implies (x : y) : z = x : (y : z)\,]$
k) $\forall\, a,\, b\, \in \mathbb{R} : [\, a \cdot b = 0 \implies (a = 0 \,\vee\, b = 0)\,]$
l) $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 \geq 4 \cdot x$
m) $\forall\, a,\, b,\, c \in \mathbb{Z}\colon\ [\, (c \mid a \,\wedge\, c \mid b) \implies \forall\, k,\, \ell \in \mathbb{Z} :\ c \mid k \cdot a + \ell \cdot b\,]$
n) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ [\, x \notin \mathbb{Q} \implies x^2 \notin \mathbb{Q}\,]$
o) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ [\, x^2 \notin \mathbb{Q} \implies x \notin \mathbb{Q}\,]$
p) $\forall\, A \subseteq \mathbb{Z}\colon\ [\, (\exists\, k \in \mathbb{Z}\, \forall\, \ell \in A\colon\ k \leq \ell) \implies (\exists\, m \in A\, \forall\, n \in A\colon\ m \leq n)\,]$

2.34. Sei Q das folgende einstellige Prädikat auf $\mathbb{N}$:

$$Q(m) = (\exists\, k \in \mathbb{N} :\ m = k^2)$$

Ermittle, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist.

a) $Q(16) \wedge \neg\, Q(17)$
b) $\forall\, m \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ [\, Q(m) \wedge Q(n) \implies Q(m+n)\,]$
c) $\forall\, m \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ [\, Q(m) \wedge Q(n) \implies Q(m \cdot n)\,]$
d) $\forall\, m \in \mathbb{N} :\ [\, Q(m) \implies Q(m^2)\,]$
e) $\exists\, m \in \mathbb{N} : [\, Q(m) \,\wedge\, Q(m+1)\,]$
f) $\forall\, k \in \mathbb{N}\, \exists\, m \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ [\, (m + 1 \leq n \leq m + k) \implies \neg\, Q(n)\,]$

2.35. Sei P ein zweistelliges Prädikat auf der Menge $X \neq \emptyset$. Betrachte folgende Aussagen:

i) $\forall\, x \in X\, \forall\, y \in X :\ P(x, y)$
ii) $\forall\, x \in X\, \exists\, y \in X :\ P(x, y)$
iii) $\exists\, x \in X\, \forall\, y \in X :\ P(x, y)$
iv) $\forall\, x \in X\, \exists\, y \in X :\ P(y, x)$
v) $\exists\, x \in X\, \forall\, y \in X :\ P(y, x)$
vi) $\exists\, x \in X\, \exists\, y \in X :\ P(x, y)$
vii) $\forall\, x \in X :\ P(x, x)$
viii) $\exists\, x \in X :\ P(x, x)$

Die Implikation

$$\forall\, x \in X :\ P(x, x) \qquad \implies \qquad \exists\, x \in X :\ P(x, x)$$

ist wahr, und zwar unabhängig von der nichtleeren Menge X und dem Prädikat P. Das ist anders für die umgekehrte Implikation. Siehst du das? Gib sowohl Beispiele von Implikationen zwischen den gelisteten Aussagen an, die ebenso unbedingt wahr sind, also auch Beispiele von Implikationen, die fallweise aber bestimmt nicht immer wahr sind. Belege deine Behauptungen mit Beweisen bzw. durch Gegenbeispiele. Tipp: z.B. $X = \{\text{Erdbewohner}\}$ und $P(x, y) \iff x$ is älter als y

2.5. **Naive Mengenlehre.**

2.36. Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, \{2, 3\}\}$, $C = \{3, \heartsuit\}$ und $D = \{\diamond, \heartsuit\}$. Stelle die gegebene Menge in aufzählender Form dar:
a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $B \cap C$ **d)** $((A \cap B) \cup C) \cap D$ **e)** $\mathcal{P}(A \cap B)$ **f)** $\mathcal{P}(A \cup B)$

2.37. Gegeben sind die Mengen A, $B \subseteq X$. Vereinfache den gegebenen Ausdruck so weit wie möglich:

a) $A \cup (B \cap A^c)$
b) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

2.38. Zeige durch konkrete Beispiele, dass die gegebene „Mengenidentität“ im Allgemeinen falsch ist:

a) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$
b) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
d) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

2.39. Seien A, $B \subseteq X$. Zeige:
Die Mengen $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B \subseteq X$ sind paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ist $A \cup B$.

2.40. Sei $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Folge von Teilmengen einer Menge X.
Wir definieren eine neue Folge von Teilmengen $(B_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ durch $B_0 = A_0$ und, wenn $\ell \geq 1$,

$$B_\ell := A_\ell \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{\ell-1} A_k \right)$$

a) Zeige: $B_i \cap B_j = \emptyset$ wenn $i \neq j$.
b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{\ell=0}^{n} B_\ell$$

c) Gilt auch die Gleichheit

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} B_\ell$$

im Allgemeinen? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

d) Wir betrachten nun den Fall, wo $A_0 = \emptyset$, $A_1 = \emptyset$ und

$$A_k := \{k \cdot n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

wenn $k \geq 2$. Ermittle, für welche ℓ gilt, dass $B_\ell \neq \emptyset$.

2.41. In dieser Aufgabe denken wir über die symmetrische Gruppe S_3 nach.

a) Führe explizit die 6 Elemente von S_3 an.
b) Erstelle die Verknüpfungstabelle für S_3. Ist diese Gruppe abelsch?
c) Zeige, dass

$$A_3 := \{\mathrm{id},\, \mu,\, \mu \circ \mu\}$$

eine abelsche Untergruppe von S_3 ist, wobei

$$\mu := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Gib einen Gruppenisomorphismus $A_3 \to \mathbb{Z}_3$ an.
e) Zeige, dass

$$\mu \circ \nu = \nu \circ \mu \circ \mu,$$

wobei

$$\nu := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

f) Stelle jedes Element von S_3 als eine Verknüpfung der Elemente μ und ν dar.

2.6. **Relationen.**

2.42. Gib je ein Beispiel einer Relation an, die

a) transitiv und symmetrisch, aber nicht reflexiv ist;
b) symmetrisch und reflexiv, aber nicht transitiv ist;
c) reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch ist.

2.43. Handelt es sich um eine Äquivalenzrelation auf der Menge M?

a) $M = \mathbb{R}$, $x \sim y \iff x = y$
b) $M = \mathbb{R}$, $x \sim y \iff x - y \geq 0$
c) $M = \mathbb{R}$, $x \sim y \iff x \cdot y \geq 0$
d) $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \sim y \iff x \cdot y > 0$

2.44. Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ eine Relation $\sim$ wie folgt:

$$(a_1,\, a_2) \sim (b_1,\, b_2) \quad \iff \quad \text{es existiert ein } t \in \mathbb{R} \text{ mit } (a_1 - b_1,\, a_2 - b_2) = (2 \cdot t,\, 3 \cdot t)$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
b) Wähle ein Element $(u_1,\, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Bestimme seine Klasse und skizziere sie als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
c) Füge der Skizze aus dem vorherigen Punkt nun die Klasse eines weiteren Elements $(v_1,\, v_2) \in \mathbb{R}^2$, das nicht in der Klasse von $(u_1,\, u_2)$ liegt.

2.45. Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ eine Relation $\sim$ wie folgt:

$$(x_1,\, y_1) \sim (x_2,\, y_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
b) Beschreibe die Äquivalenzklassen geometrisch.

2.46. Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ eine Relation $\sim$ wie folgt:

$$(x_1,\, y_1) \sim (x_2,\, y_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
b) Beschreibe die Äquivalenzklassen geometrisch.

2.47. Sei $f\colon\ X \to Y$ eine Funktion und $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf Y.
Wir definieren eine Relation auf X folgendermaßen:

$$x_1 \sim x_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x_1) \approx f(x_2)$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

2.48. Wir erklären auf $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\, 0)\}$ eine Relation $\sim$ wie folgt:

$$(x_1,\, y_1) \sim (x_2,\, y_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda > 0 \ \wedge\ x_2 = \lambda \cdot x_1 \ \wedge\ y_2 = \lambda \cdot y_1)$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist
b) Ermittle die Äquivalenzklassen von i) $(1,\, 0)$ ii) $(0,\, 1)$ iii) $(1,\, -2)$.
c) Zwischen dem Quotientenraum $S = \mathbb{R}^2/\sim$ und dem Einheitskreis

$$\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

besteht ein natürlicher Zusammenhang. Beschreibe diesen Zusammenhang knapp in Worten.
d) Eine zweite Äquivalenzrelation $\approx$ auf X ist folgendermaßen definiert:

$$(x_1,\, y_1) \approx (x_2,\, y_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : (x_2 = \lambda \cdot x_1 \ \wedge\ y_2 = \lambda \cdot y_1)$$

Erkläre den Unterschied zwischen den Relationen $\sim$ und $\approx$ anhand ihrer Äquivalenzklassen.

2.49. Wir definieren eine Relation $\trianglelefteq$ auf $\mathbb{N}^*$ wie folgt:

$$a \trianglelefteq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \mid b$$

a) Zeige, dass $\trianglelefteq$ eine Ordnungsrelation ist.

b) Ist $(\mathbb{N}^*, \trianglelefteq)$ eine total geordnete Menge?

c) Ermittle die größte untere Schranke und die kleinste obere Schranke der gegebenen Teilmenge von $\mathbb{N}^*$ bezüglich $\trianglelefteq$ oder zeige, dass solche besten Schranken nicht existieren.
i) $\{4, 20\}$ ii) $\{5, 11\}$ iii) $\{2, 7, 42\}$

2.50. Wir erklären auf der Menge $X = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \colon a < b < c\}$ die folgende Relation:

$$(a_1, b_1, c_1) \sim (a_2, b_2, c_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{c_1 - b_1}{c_1 - a_1} = \frac{c_2 - b_2}{c_2 - a_2}$$

Kannst du dir die Menge X als Teilmenge des „Anschauungsraumes“ vorstellen?

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Ermittle die Äquivalenzklasse von i) $(1, 2, 3)$ ii) $(-1, 0, 1)$ iii) $(1, 100, 10000)$.

c) Sei $(a, b, c) \in X$. Zeige: Es gibt ein $(a_0, b_0, c_0) \in X$ mit $(a_0, b_0, c_0) \sim (a, b, c)$ und $b_0 = 0$.

d) Führe eine Bijektion zwischen dem Quotientenraum $X/\sim$ und dem Intervall $]0; 1[$ an.

2.51. Wir definieren eine Relation $\preceq$ auf $\mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x_2 - x_1| \preceq y_2 - y_1$$

a) Zeige, dass $\preceq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Ist $\preceq$ eine Totalordnung?

c) Beschreibe die Mengen
– $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \preceq (0, 0)\}$
– $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0) \preceq (x, y)\}$
geometrisch.

2.52. Sei $d \in \mathbb{N}$ und

$$T_d = \{n \in \mathbb{N} : n \mid d\}$$

die sogenannte Teilermenge von d. Wir definieren auf T_d eine Relation wie folgt:

$$n \preceq m \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \mid m$$

a) Zeige, dass $\preceq$ eine Ordnungsrelation auf T_d ist.

b) Ermittle in $(T_{30}, \preceq)$ das Infimum und das Supremum der folgenden Menge:
i) $\{2, 3\}$ **ii)** $\{3, 5\}$ **iii)** $\{6, 10\}$ **iv)** $\{3, 6, 15\}$

c) Seien $d \in \mathbb{N}$ und m, n zwei Teiler von d. Stelle eine Vermutung auf, um welche Zahlen es sich beim Infimum und beim Supremum der Menge $\{m, n\}$ in $(T_d, \preceq)$ jeweils handelt. Versuche gleich, deine Vermutung auch zu beweisen.

2.7. **Abbildungen.**

2.53. Gib eine explizite Bijektion $f\colon A \to B$ an.

a) $A = \{2 \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}$ und $B = \{2 \cdot \ell - 1 : \ell \in \mathbb{Z}\}$
b) $A = \{3 \cdot a : a \in \mathbb{Z}\}$ und $B = \{3 \cdot b + 1 : b \in \mathbb{Z}\} \cup \{3 \cdot c + 2 : c \in \mathbb{Z}\}$
c) $A = \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 99\}$ und $B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, \ldots, 19\}$

2.54. Im Amerikanischen wird im Zusammenhang mit Funktionen gerne der *vertical line test* ins Feld geführt: Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ist genau dann der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn G den *vertical line test* erfüllt. Wie sieht der *vertical line test* wohl genau aus? Gib Beispiele von Teilmengen $G \subseteq \mathbb{R}^2$, die den vertical line test erfüllen, und von solchen, die das nicht tun. Wähle deine Beispiele gewissenhaft so, dass sie dir selbst beim Verstehen von Funktionen und ihren Graphen geholfen hätten.

2.55. Ermittle einen möglichst einfachen Funktionsterm für die Verknüpfungsabbildung $f \circ g$.

a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ☺ $\mapsto$ ☺^{2} und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\heartsuit \mapsto 2 \cdot \heartsuit$
b) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto e^y$ und $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot \log(x)$

2.56. Ermittle das Urbild $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in I\}$ des Intervalls I bezüglich der Abbildung f.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot x - 7$, $I = (-5, 7]$
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{9}{4} \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2$, $I = [2, 5)$
c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-3, -5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x+3} - \frac{x+2}{x+5}$, $I = (0, \infty)$

2.57. Wir betrachten die Verknüpfung $f \circ g : A \to C$ zweier Funktionen $g\colon A \to B$ und $f : B \to C$. Ist die behauptete Implikation unbedingt richtig? Führe einen Beweis oder gib ein Gegenbeispiel an.

a) Sind f und g beide injektiv, dann ist auch $f \circ g$ injektiv.
b) Ist $f \circ g$ injektiv, dann ist auch f injektiv.
c) Ist $f \circ g$ injektiv, dann ist auch g injektiv.
d) Sind f und g beide surjektiv, dann ist auch $f \circ g$ surjektiv.
e) Ist $f \circ g$ surjektiv, dann ist auch f surjektiv.
f) Ist $f \circ g$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv.

2.58. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive Funktion mit Umkehrfunktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$. Zeige, dass die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Funktionsterm
a) $h(x) = \lambda \cdot f(x)$ **b)** $h(x) = f(x - \lambda)$ **c)** $h(x) = f(\lambda \cdot x)$
bijektiv ist. Was ist der Funktionsterm der Umkehrfunktion?

2.59. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ und $a \cdot d \neq b \cdot c$.
Wir interessieren uns in dieser Aufgabe für die folgende Funktion:

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}, \qquad f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

a) Vergewissere dich, dass die Funktion f wohldefiniert ist.
b) Zeige: f ist injektiv.
c) Zeige: f ist surjektiv.
d) Ermittle eine explizite Funktionsgleichung der Umkehrfunktion

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

2.60. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) Zeige: Für alle Teilmengen $A \subseteq X$ gilt, dass $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
b) Zeige: f ist genau dann injektiv, wenn $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle Teilmengen $A \subseteq X$ gilt.
c) Zeige: Für alle Teilmengen $B \subseteq Y$ gilt, dass $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
d) Zeige: f ist genau dann surjektiv, wenn $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle Teilmengen $B \subseteq Y$ gilt.

2.61 (Satz von Cantor)**.** Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Menge all ihrer Teilmengen.
Führe Georg Cantors Beweis, dass keine surjektive Abbildung $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ existiert:

i) Sei $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ eine surjektive Abbildung.
ii) Wir fokussieren auf all jene Elemente von X, die selbst nicht in ihrem Bild unter f enthalten sind:

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

iii) Erkläre, weshalb es $a \in X$ mit $f(a) = A$ gibt.
iv) Zeige: Die Behauptung $a \in A$ ist absurd.
v) Zeige: Die Behauptung $a \notin A$ ist absurd.
vi) Zeige: Die Gesamtsituation ist absurd.
Es gibt keine surjektive Abbildung $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$.

2.62. Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Menge all ihrer Teilmengen.
Gib eine injektive Abbildung $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ an.

2.63 (Parametervariation)**.** Wir bezeichnen mit X die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Seien a, $b \in \mathbb{R}$ beide ungleich null und $\lambda \in \mathbb{R}$ positiv und ungleich 1.
Wir betrachten die Abbildung $S\colon X \to X$.
Die Funktionsgleichung von $S(f)$ hängt mit der Funktionsgleichung von f folgendermaßen zusammen:

i) $S(f)(x) = f(x - a)$
ii) $S(f)(x) = f(x) + b$
iii) $S(f)(x) = \lambda \cdot f(x)$
iv) $S(f)(x) = f(\lambda \cdot x)$
v) $S(f)(x) = -f(x)$
vi) $S(f)(x) = f(-x)$

a) Beschreibe jeweils in Alltagssprache, wie der Graph von $S(f)$ aus dem Graphen von f hervorgeht. Verwende Vokabel wie spiegeln, stauchen, strecken, verschieben, horizontale und vertikale Achse, etc. Achte auf Unterschiede je nach Vorzeichen von a und b oder aber ob $0 < \lambda < 1$ oder $\lambda > 1$.
b) Zeige jeweils, dass $S\colon X \to X$ bijektiv ist und gib die Umkehrabbildung $T\colon X \to X$ an.

c) Beschreibe in Alltagssprache, wie der Graph der Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 3$ sukzessive durch Verschiebungen, Streckungen, Stauchungen und Spiegelungen aus dem Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ hervorgeht. Tipp: Stelle die Funktionsgleichung von g in Scheitelpunktform dar.

2.8. **Abzählen.**

2.64. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: **a)** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ **b)** $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$ Tipp: Binomischer Lehrsatz

2.65. Sei P eine endliche Menge von Punkten in der Ebene und sei G eine endliche Menge von Geraden in der Ebene. Für jeden Punkt $p \in P$ bezeichne $\gamma(p)$ die Anzahl der Geraden in G, die durch p laufen. Für jede Gerade $g \in G$ bezeichne $\pi(g)$ die Anzahl der Punkte in P, die auf g liegen. Zeige:

$$\sum_{p \in P} \gamma(p) = \sum_{g \in G} \pi(g)$$

Tipp: Zähle die Elemente der Menge $\{(p, g) \in P \times G : p \in g\}$ auf zwei verschiedene Weisen.

2.66. Für endliche Mengen A und B gilt stets

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

wobei $|X|$ die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge X bezeichnet. Verwende dies, um auch die Gleichung

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = {} & |A| + |B| + |C| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|, \end{aligned}$$

für je drei endliche Mengen A, B und C herzuleiten. Wie lautet die analoge Formel für $|A \cup B \cup C \cup D|$?

2.67. Sei X eine endliche Menge mit genau n Elementen.
Wir bezeichnen mit $P_k(X)$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von X, wobei $0 \leq k \leq n$.

a) Zeige, dass die Funktion

$$f\colon P_k(X) \to P_{n-k}(X), \qquad f(A) = X \setminus A$$

eine Bijektion ist. Gib die Umkehrabbildung $g\colon P_{n-k}(X) \to P_k(X)$ an.

b) Es folgt, dass

$$|P_k(X)| = |P_{n-k}(X)|.$$

Welcher Beziehung zwischen bestimmten Binomialkoeffizienten entspricht das?

2.68. Seien X_1 und X_2 zwei disjunkte endliche Mengen und $X = X_1 \cup X_2$.

a) Zeige, dass die Funktion

$$f\colon P(X) \to P(X_1) \times P(X_2), \qquad f(A) := (A \cap X_1, A \cap X_2)$$

eine Bijektion ist und gib die Umkehrabbildung an.

b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$f(P_k(X)) = \bigcup_{\substack{k_1,\, k_2 \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 = k}} P_{k_1}(X_1) \times P_{k_2}(X_2) \tag{5}$$

c) Folgere mithilfe von (5), dass

$$|P_k(X)| = \sum_{\substack{k_1,\, k_2 \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 = k}} |P_{k_1}(X_1)| \cdot |P_{k_2}(X_2)|,$$

und leite damit die Vandermondesche Identität her:

$$\binom{n_1 + n_2}{k} = \sum_{\substack{k_1,\, k_2 \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 = k}} \binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2}$$

d) Erkläre, wie aus der Vandermondeschen Identität die folgenden Spezialfälle folgen:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad \text{und} \qquad \binom{2 \cdot n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k}$$

2.69. In dieser Aufgabe stellen wir einige elementare Abzählprobleme zusammen.

a) Wieviele fünfstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1 bis 5 bilden, wenn jede Ziffer genau einmal vorkommen soll? Was ist die Summe all dieser Zahlen?

b) Wieviele fünfstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1 bis 9 bilden, wenn jede Ziffer höchstens einmal vorkommen soll? Was ist die Summe all dieser Zahlen?

2.9. **Gruppen, Ringe, Körper.**

2.70. Sei A eine Menge und $\mathcal{B}(A)$ die Menge aller bijektiven Funktionen $f\colon A \to A$. Zeige, dass $(\mathcal{B}(A), \circ)$ eine Gruppe ist, wobei

$$\circ\colon \mathcal{B}(A) \times \mathcal{B}(A) \to \mathcal{B}(A)$$

die übliche Verknüpfung von Funktionen ist.

2.71. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement.

a) Welche Elemente des Rings nennt man Einheit, welche Nullteiler?

b) Zeige: Kein Element von R ist sowohl Einheit als auch Nullteiler.

2.72. Ermittle alle Unterkörper von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

2.73. Wir erklären die binären Operationen $\oplus : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ und $\odot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ wie folgt:

$$a \oplus b = a + b - 1 \qquad \text{und} \qquad a \odot b = a + b - a \cdot b$$

a) Zeige, dass $a \oplus 1 = a$ für jedes $a \in \mathbb{Q}$ gilt.

b) Zeige, dass $a \odot 0 = a$ für jedes $a \in \mathbb{Q}$ gilt.

c) Zeige, dass die Gleichung $a \oplus x = 1$ für jedes $a \in \mathbb{Q}$ eine Lösung hat.

d) Zeige, dass die Gleichung $a \odot x = 0$ für jedes $a \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 1$ eine Lösung hat.

e) Zeige, dass $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ ein Körper ist mit Nullelement 1 und Einselement 0 ist.

2.74. Verwende in dieser Aufgabe, dass $(R, +, \cdot)$ mit $R = \mathbb{R}^2$ und den Verknüpfungen

$$(r_1, r_2) + (s_1, s_2) := (r_1 + s_1, r_2 + s_2) \quad \text{und} \quad (r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) := (r_1 \cdot s_1, r_2 \cdot s_2)$$

ein kommutativer Ring mit dem Einselement $(1, 1)$ ist.

a) Welche Elemente $(r_1, r_2) \in R$ haben ein multiplikatives Inverses?

b) Bestimme alle Nullteiler in $(R, +, \cdot)$. Ist $(R, +, \cdot)$ ein Körper?

c) Zeige, dass die Teilmenge

$$J = \{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

einen Unterring von $(R, +, \cdot)$ bildet, der die folgende weitere Eigenschaft hat (und deshalb ein sogenanntes Ideal ist): Für beliebige $x \in R$ und $y \in J$ ist stets sowohl $x \cdot y \in J$ als auch $y \cdot x \in J$.

2.75 (Satz von Lagrange). Seit $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe.

a) Wir definieren auf G eine Relation $\sim$ wie folgt:

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x \circ y^{-1} \in H$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige: $H = [\,1\,]_\sim$

c) Sei $x \in G$. Zeige: $[\,x\,]_\sim = \{h \circ x : h \in H\}$

d) Seien $x, y \in G$. Gib eine Bijektion zwischen $[\,x\,]_\sim$ und $[\,y\,]_\sim$ an. Die Klassen sind also alle gleich groß.

e) Angenommen, $|G| < \infty$. Zeige: $|H|$ teilt $|G|$. „Die Ordnung einer Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe."

2.76. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement.
Ein *Ideal* ist eine Teilmenge $I \subseteq R$ mit den folgenden drei Eigenschaften:
i) $0 \in I$ ii) $x, y \in I \implies x - y \in I$ iii) $r \in R$ und $x \in I \implies r \cdot x \in I$

a) Zeige: $\{0\}$ und R sind Ideale.

b) Zeige: Enthält ein Ideal $I \subseteq R$ eine Einheit, dann ist $I = R$.

c) Sei $x \in R$. Zeige, dass

$$I = \{r \cdot x : r \in R\}$$

ein Ideal ist. Wir nennen I das von x *erzeugte Ideal*.

d) Angenommen, $\{0\}$ und R sind die einzigen Ideale in $(R, +, \cdot)$. Zeige: $(R, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Tipp: Sei $x \in R$ mit $x \neq 0$. Denke über das von x erzeugte Ideal nach.

2.77. In dieser Aufgabe untersuchen wir die Ideale im Ring der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

a) Sind die folgenden Teilmengen $I \subseteq \mathbb{Z}$ Ideale? i) $I = \{2 \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}$ ii) $I = \{2 \cdot k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$

b) Sei $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein Ideal mit i) $3,\, 4 \in I$ ii) $3,\, 10 \in I$ iii) $7,\, 23 \in I$. Zeige: $I = \mathbb{Z}$

c) Zeige, dass jedes Ideal $I \subseteq \mathbb{Z}$ die folgende Form für ein passendes $n \in \mathbb{N}$ hat:

$$I = \{m \cdot n : m \in \mathbb{Z}\}$$

Tipp: Sei $I \neq \{0\}$ und $n = \min\{k : k \in I \text{ und } k \geq 1\}$. Sei $\ell \in I$. Zeige, dass I auch den Rest, den ℓ bei Division durch k lässt, enthält.

2.78. Zeige, dass alle nicht-trivialen Unterringe von $(\mathbb{Z},\, +\,,\, \cdot\,)$ zueinander isomorph sind.

2.79. Sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Wir definieren

$$M = \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$$

wobei $A \sim B$ genau dann gilt, wenn $|A| = |B|$, also die beiden Menge gleich viele Element haben. Auf M definieren die binäre Operation

$$\times\colon\ M \times M \to M, \qquad ([A],[B]) \mapsto [A \times B]$$

Beachte hier, dass $|\,\emptyset\,| = 0$ und $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$ für alle $A, B \in M$.

a) Zeige, dass die Abbildung $\times$ wohldefiniert ist.

b) Zeige, dass $(M, \times)$ ein kommutatives Monoid mit neutralem Element ist.

c) Was ist das neutrale Element in $(M, \times)$?

d) Zeige, dass in $(M, \times)$ nur das neutrale Element ein inverses Element hat.

e) Ist $(M, \times)$ zu i) $(\mathbb{N}_0,\, \cdot\,)$ oder zu ii) $(\mathbb{N}_0,\, +\,)$ isomorph?

2.10. **Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.**

2.80. Für welche Werte von $n \in \mathbb{N}$ ist der gegebene Term eine Quadratzahl?

a) n^2

b) $n^2 - 2 \cdot n + 1$

c) $n^2 + 2 \cdot n + 1$

d) $n^2 + 1$

e) $n^2 + 2 \cdot n$

f) $n^2 - n$

g) $n^2 + n + 1$

h) $4 \cdot n^2$

i) $9 \cdot n^2 - 6 \cdot n$

j) n^3

k) $4 \cdot n + 3$

l) $6 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 5$

2.81. Stelle die gegebene Zahl in der Form $p + q \cdot \sqrt{3}$ mit $p,\, q \in \mathbb{Q}$ dar.

a) $3 \cdot (2 - 7 \cdot \sqrt{3}) - (-3 + \sqrt{3}) \cdot 2$ **b)** $(1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})$ **c)** $\dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{3} - 3}$

2.82. Ist es möglich, die gegebene Zahl in der Form $p + q \cdot \sqrt{3}$ mit $p,\, q \in \mathbb{Q}$ darzustellen?

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt[4]{3}$ **c)** $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

2.83. Ist die gegebene Zahl rational oder irrational?

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}$ **c)** $\sqrt[3]{5}$

2.84. Ist die gegebene Zahl rational oder irrational?

a) $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}$ **b)** $\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{2} - 7}$ Tipp: Sei $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$. Zeige, dass $x^3 = u + v + 3 \cdot \sqrt[3]{u} \cdot \sqrt[3]{v} \cdot x$.

2.85 (Pythagoräische Tripel)**.** In dieser Aufgabe ist g die Gerade durch die Punkte

$$A = (0 \mid -1) \qquad \text{und} \qquad B = (r \mid 0),$$

wobei $r \in \,]0;1[$ und k der Kreis mit Mittelpunkt $(0 \mid 0)$ und Radius 1.

a) Zeige: Die Gerade g schneidet den Kreis k in genau zwei Punkten, A und C, wobei gilt:

$$C = \left(\frac{2 \cdot r}{1 + r^2} \;\Big|\; \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \right)$$

b) Zeige: Die Koordinaten von C sind genau dann beide rational, wenn r rational ist.

c) Zeige: Die Menge

$$\{(p \mid q) : p,\, q \in \mathbb{Q},\, p,\, q > 0 \text{ sind positiv, rational und } p^2 + q^2 = 1\}$$

ist unendlich.

d) Zeige: Es gibt unendlich viele Tripel $(a \mid b \mid c)$ mit $a,\, b,\, c \in \mathbb{N}^*$ und $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$, sodass:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Tipp: Denke über die Punkte $(p \mid q)$ mit $p = \frac{a}{c}$ und $q = \frac{b}{c}$ nach.

2.86. Alex und Berni spielen ein Polynom-Ratespiel. Berni denkt sich ein Polynom aus, das Alex erraten soll. Um die Sache nicht zu kompliziert zu machen, vereinbaren die beiden, dass alle Koeffizienten des Polynoms natürliche Zahlen sein müssen. Alex darf Berni nun Zahlen nennen. Berni muss das Polynom an diesen Zahlen auswerten und das Ergebnis verraten. Berni ist baff, dass Alex nach jeweils zwei Runden das Polynom errät. Wie macht Alex das nur?

a) Wie lautet Bernis Polynom, wenn es an der Stelle 1 den Wert 8 hat und bei 10 den Wert 4103?
b) An welches Polynom denkt Berni, wenn es bei 1 den Wert 15 hat und bei 16 den Wert 285?

Für die folgenden Aufgaben sei

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,] = \{\alpha \in \mathbb{R} : \text{es gibt } p,\, q \in \mathbb{Q} \text{ mit } \alpha = p + q \cdot \sqrt{2}\}.$$

2.87. Seien $p_1,\, q_1,\, p_2,\, q_2 \in \mathbb{Q}$. Zeige:

$$p_1 + q_1 \cdot \sqrt{2} = p_2 + q_2 \cdot \sqrt{2} \implies p_1 = p_2 \text{ und } q_1 = q_2$$

Die Darstellung von Zahlen in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ in der Form $p + q \cdot \sqrt{2}$ mit $p,\, q \in \mathbb{Q}$ ist also eindeutig.

2.88. Zeige: **a)** $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ **b)** $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,] \subsetneq \mathbb{R}$ Tipp: Zeige, dass $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$.

2.89. Zeige, dass für alle $\alpha,\, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ gilt:

a) $\alpha + \beta,\ \alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ **b)** $-\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ **c)** $\alpha \neq 0 \implies \dfrac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$

Bemerkung: Du hast in Aufgabe 2.89 nachgewiesen, dass wir durch Grundrechnen (Plus, Minus, Mal, Durch) mit Zahlen in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ nicht aus $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ fallen. Mit anderen Worten, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ ist ein Unterkörper der reellen Zahlen. Allgemein definieren wir für jede natürliche Zahl n, die keine Quadratzahl ist, $\mathbb{Q}[\sqrt{n}\,]$ als die Menge aller reellen Zahlen, die sich als $p + q \cdot \sqrt{n}$ mit $p,\ q \in \mathbb{Q}$ schreiben lassen. Wie im Spezialfall $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ weist man nach, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{n}\,]$ ein Körper ist, der „echt“ zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ liegt. □

2.90. Sei n eine natürliche Zahl, die keine Quadratzahl ist.

i) Zeige, dass
$$\mathbb{Z}[\sqrt{n}\,] = \{z \in \mathbb{R} : \text{es gibt } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } z = a + b \cdot \sqrt{n}\}$$
ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist.

ii) Zeige, dass für alle $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:
$$a_1 + b_1 \cdot \sqrt{n} = a_2 + b_2 \cdot \sqrt{n} \quad \implies \quad (a_1 = a_2 \land b_1 = b_2)$$
Die Darstellung von Zahlen in $\mathbb{Z}[\sqrt{n}\,]$ in der Form $a + b \cdot \sqrt{n}$ mit $a,\ b \in \mathbb{Z}$ ist also eindeutig.

iii) Sei $N : \mathbb{Z}[\sqrt{n}\,] \to \mathbb{Z}$ die Funktion, die $z = a + b \cdot \sqrt{n}$ mit $a,\ b \in \mathbb{Z}$ den Wert
$$N(z) = a^2 - n \cdot b^2$$
zuordnet. Zeige, dass für alle $z_1,\ z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}\,]$ gilt:
$$N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$$

iv) Seien $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass gilt:
$$N(a + b \cdot \sqrt{2}) = N(a - b \cdot \sqrt{2}) = N(-a - b \cdot \sqrt{2}) = N(-a + b \cdot \sqrt{2})$$

v) Sei $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}\,]$. Zeige, dass gilt:
$$z \text{ ist eine Einheit in } \mathbb{Z}[\sqrt{n}\,] \quad \iff \quad N(z) \in \{-1, 1\}$$

vi) Ist die gegebene Zahl eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$? Ermittle gegebenenfalls die Inverse der Zahl in der Form $a + b \cdot \sqrt{2}$ mit $a,\ b \in \mathbb{Z}$. i) $\sqrt{2} - 1$ ii) $3 + 2 \cdot \sqrt{2}$ iii) $2 + \sqrt{2}$

vii) Seien $a,\ b \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ so, dass $z = a + b \cdot \sqrt{2}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ ist. Zeige, dass
$$z \cdot (\sqrt{2} - 1) = c + d \cdot \sqrt{2}$$
mit $c = 2 \cdot b - a$ und $d = a - b$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ ist und $c > 0$ und $d \geq 0$ gilt.
Wie lautet z, wenn $d = 0$?

viii) ☆ Zeige: Die (multiplikative) Untergruppe der Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.
Tipp: Verwende, dass $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2} - 1)^n = 0$.

2.11. **Restklassen.**

2.91. Welchen Rest lässt 2^{42} bei Division durch 42?

2.92. Wie ist der gegebene Term sinnvoll zu interpretieren? Vereinfache den Term.

a) $\frac{[4]_7-[6]_7}{[2]_7+[1]_7}$ **b)** $\frac{\frac{[3]_7}{[5]_7}}{\frac{[6]_7}{[4]_7}}$

2.93. Sei $p \in \mathbb{P}$ und $x \in \{1, \ldots, p-1\}$.

a) Zeige, dass für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a_1 \cdot x \equiv a_2 \cdot x \bmod p \implies a_1 \equiv a_2 \bmod p$$

b) Zeige damit, dass bei Division durch p die Reste der Zahlen

$$a \cdot x, \qquad a = 0, 1, \ldots, p-1$$

alle verschieden sind.

c) Folgere, dass für alle $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ gilt:

$$\{[\,1\,]_p, [\,2\,]_p, \ldots, [\,p-1\,]_p\} = \{[\,a\,]_p, [\,a\cdot 2\,]_p, \ldots, [\,a\cdot(p-1)\,]_p\}$$

d) Veranschauliche das Ergebnis der vorigen Teilaufgabe durch Rechnung im Fall $p = 11$ und $x = 3$.

e) Folgere, dass es genau ein $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ gibt, für das gilt:

$$a \cdot x \equiv 1 \bmod p$$

f) Zeige, dass gilt:

$$[\,1\,]_p \cdot [\,2\,]_p \cdot \ldots \cdot [\,p-1\,]_p = [\,a\,]_p \cdot [\,a\cdot 2\,]_p \cdot \ldots \cdot [\,a\cdot(p-1)\,]_p$$

Folgere daraus den *Kleinen Satz von Fermat*:

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

2.94. Zeige, dass $[47]_{210}$ im Restklassenring $\mathbb{Z}_{210}$ invertierbar ist und bestimme das multiplikative Inverse. Verwende dies, um alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}_{210}$ der folgenden Gleichung zu bestimmen:

$$[47]_{210} \cdot x + [36]_{210} = [58]_{210}$$

2.95. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Einheiten (d.h. die multiplikativ invertierbaren Elemente) im Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe bilden – die sogenannte Einheitengruppe.

a) Stelle eine Gruppentafel der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_5$ auf.

b) Stelle eine Gruppentafel der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_{12}$ auf.

c) Wie viele Lösungen x von $x^2 = [\,1\,]_5$ beziehungsweise $x^2 = [\,1\,]_{12}$ gibt es jeweils?

Daraus folgt, dass die beiden Einheitengruppen grundverschieden (nicht-isomorph) sind.

2.96. Sei $p \in \mathbb{P}$.

a) Zeige, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq p-1$ gilt:

$$p \mid \binom{p}{k}$$

Verdeutliche dir diese Tatsache im Pascalschen Dreieck wenn $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7$.

b) Sei $a \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$a^p \equiv a \bmod p$$

c) Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid a$. Folgere den *Kleinen Satz von Fermat*:

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

Der Kleine Satz von Fermat hat einen großen Bruder.

2.97. Sei $p \in \mathbb{P}$. Dann heißt $a \in \mathbb{Z}$ **quadratischer Rest** modulo p, wenn es $x \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass gilt:

$$x^2 \equiv a \bmod p$$

a) Zeige: Sind $a,\ b \in \mathbb{Z}$ quadratische Reste modulo p, dann auch $a \cdot b$.

b) Zeige: Ist $a \in \mathbb{Z}$ quadratischer Rest modulo p, dann auch jedes Element der Restklasse $[\,a\,]_p$.

c) Ermittle alle *quadratischen Reste* modulo 2, modulo 7 und modulo 11.

d) ☆ Sei $p \neq 2$. Zeige: Es gibt genau $\frac{1}{2} \cdot (p-1)$ quadratische Reste modulo p in $\{0,\ 1,\ \dots,\ p-1\}$.

2.98. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + x + 42$.
Ermittle alle Werte von b, für die der Wendepunkt von f zwei ganzzahlige Koordinaten hat.

2.12. **Teilbarkeit.**

2.99. Eine natürliche Zahl heißt vollkommen, wenn sie die Summe all ihrer Teiler, die kleiner als sie selbst sind, ist. Zum Beispiel ist 6 eine vollkommene Zahl, denn es gilt: $6 = 1 + 2 + 3$.

a) Zeige: 42 ist (doch) nicht vollkommen.

b) Zeige: Es gibt keine vollkommenen Primzahlen.

c) Gib ein Beispiel einer weiteren vollkommenen Zahl.

d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige:
Ist $2^n - 1$ prim, dann ist $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ eine gerade, vollkommene Zahl. Das wusste schon Euklid.

e) Ist jede gerade, vollkommene Zahl von der Gestalt $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ wobei $n \in \mathbb{N}$ und $2^n - 1$ prim?

2.100. Wie viele Stellen hat die Zahl 2019^{2019} und was ist ihre Einerziffer? Hier ist der TR erlaubt.

2.101. Gibt es eine natürliche Zahl, die genau 42 Teiler hat? Wenn ja, was ist die kleinste solche Zahl?

2.102. Sei $k \in \mathbb{N}^*$. Zeige:

a) Wenn $2^k - 1$ eine Primzahl ist, dann ist auch k eine Primzahl.
b) Wenn $2^k + 1$ eine Primzahl ist, dann ist $k = 2^\ell$ für ein passendes $\ell \in \mathbb{N}$.
c) Die Umkehrungen beider obiger Behauptungen sind falsch.

Primzahlen von erstem Typ heißen *Mersenne Primzahlen*, solche von zweitem Typ *Fermat Primzahlen*.

2.103. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ so, dass $a \mid b$ und $b \mid a$. Welche Aussage kannst du über a und b treffen?

2.104. Ist die gegebene Aussage für alle ganzen Zahlen a, b, c, d wahr?
Finde einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) Wenn $a \mid b$ und $c \mid d$, dann folgt $a \cdot b \mid c \cdot d$.
b) Wenn $a \cdot b \mid c \cdot d$, dann folgt $a \mid c$ und $b \mid d$.
c) Wenn $a \mid c$ und $b \mid d$, dann folgt $a \cdot b \mid c \cdot d$.
d) Wenn $a \cdot b \mid c \cdot d$ und $a \mid c$, dann folgt $b \mid d$.

2.105. Zeige durch Beweis und Gegenbeispiel, dass eine der beiden gegebenen Aussagen richtig ist und die andere falsch. Die richtige Aussage ist das Rückgrat des Euklidischen Algorithmus.

i) $\forall\, m, n, q, r \in \mathbb{Z}\colon \Big(m = n \cdot q + r \implies \forall\, d \in \mathbb{Z} : [(d \mid m \wedge d \mid n) \iff (d \mid n \wedge d \mid r)]\Big)$
ii) $\forall\, m, n, q, r \in \mathbb{Z}\colon \Big(m = n \cdot q + r \implies \forall\, d \in \mathbb{Z} : [(d \mid m \wedge d \mid r) \iff (d \mid m \wedge d \mid q)]\Big)$

2.13. **Primfaktorzerlegung.**

2.106. Seien $a, b \in \mathbb{N}^*$ und $p_1, \ldots, p_n$ eine Liste lauter verschiedener Primzahlen, die alle Primteiler von a und von b enthält. Es gibt also $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \qquad \text{und} \qquad b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$$

a) Zeige:

$$a \mid b \qquad \iff \qquad \alpha_i \leq \beta_i \quad \text{für alle } i$$

b) Zeige:

$$\operatorname{ggT}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{kgV}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$$

c) Zeige:

$$a \text{ ist eine Quadratzahl} \qquad \iff \qquad 2 \mid \alpha_i \text{ für alle } i$$

d) Wie viele Teiler hat a in $\mathbb{N}$?

2.107. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$.

a) Zeige:

$$c \mid a \quad \text{und} \quad c \mid b \qquad \implies \qquad c \mid \operatorname{ggT}(a,b)$$

b) Zeige:

$$a \mid d \quad \text{und} \quad b \mid d \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{kgV}(a,b) \mid d$$

2.108 (Fermat-Zahlen)**.** Wir betrachten die Folge (F_n) der sogenannten Fermat-Zahlen,

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1.$$

a) Zeige: $F_n = 2 + F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.
b) Zeige: Je zwei verschiedene Fermat-Zahlen sind teilerfremd.
c) Folgere aus dem Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

2.14. **Euklidischer Algorithmus.**

2.109 (Euklidischer Algorithmus)**.** Seien $m,\, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$. Dann gilt bekanntlich:

i) $\mathrm{ggT}(m,n) = \mathrm{ggT}(n,m)$
ii) $\mathrm{ggT}(m,\, n + k \cdot m) = \mathrm{ggT}(m,n)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$
iii) $\mathrm{ggT}(m,0) = |m|$

Erkläre die folgende Berechnung von $\mathrm{ggT}(357,168)$ mithilfe dieser drei Eigenschaften:

$$\mathrm{ggT}(357,168) = \mathrm{ggT}(21,168) = \mathrm{ggT}(21,0) = 21$$

Berechne ähnlich:

a) $\mathrm{ggT}(12,78)$
b) $\mathrm{ggT}(611,752)$

2.15. **Chinesischer Restsatz.**

2.110. Gesucht ist eine positive, ganze Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 2, bei Division durch 5 den Rest 4 und bei Division durch 7 den Rest 6 ergibt.

a) Verwende den Chinesischen Restsatz, um eine solche Zahl zu finden.
b) Die geforderten Reste sind von einer besonderen Form. Hat man diese Besonderheit einmal erkannt, kommt man – ohne Restsatz – durch kurze Kopfrechnung auf die Lösung. Wie?

2.111. Alex geht jeden dritten Tag in die Mensa, Bernie jeden Montag und Charlie immer dann, wenn es Pizza gibt. Die steht nur alle 8 Tage auf der Karte. Am ersten Jänner ist keiner der drei in der Mensa. Alex wird morgen dort sein, Bernie übermorgen und Alex am Tag danach. Wann werden die drei das erste Mal in diesem Jahr gemeinsam in der Mensa sitzen?

Bemerkung: Die Mensa, von der hier die Rede ist, hat jeden Tag geöffnet.

2.16. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

2.112. Zeige, dass für alle a, $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2} \qquad \text{und} \qquad \max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

2.113. Zeige, dass es irrationale Zahlen x, $y > 0$ gibt, sodass x^y rational ist.

Diese charmante Frage hat eine lange Geschichte.

2.114. Sei (q_n) eine Abzählung aller rationalen Zahlen, die im Intervall $[0;1]$ liegen.
Zeige, dass $\inf A_m = 0$ und $\sup A_m = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$, wobei $A_m = \{q_n : n \geq m\}$.

2.17. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

2.115. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$.

a) $z^2 + 1 = 0$
b) $z^2 - 1 = 0$
c) $z^3 + 1 = 0$
d) $z^3 - 1 = 0$
e) $z^2 + k \cdot z + 1 = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$
f) $z^4 + 2 \cdot z^2 + 1 = 0$

2.116. Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Fasse die gegebene Summe als Real- bzw. Imaginärteil einer geometrischen Reihe auf und berechne so ihren Wert. Interpretiere dein Ergebnis auch geometrisch.
a) $\sum_{k=1}^{n} \cos\left(k \cdot \frac{2\cdot\pi}{n}\right)$ **b)** $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(k \cdot \frac{2\cdot\pi}{n}\right)$ **c)** $\sum_{k=1}^{n} \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{n}\right)$ **d)** $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{n}\right)$

2.117. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$.
a) $z^2 + p \cdot z + q = 0$ **b)** $z^4 + p \cdot z^2 + q = 0$
Hier ist $p = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot i - 1$ und $q = \sqrt{6} + \sqrt{2} \cdot i$.

Tipp: Scheitelpunktform

2.118. Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl, sodass $|z^3 + z^{-3}| < 2$. Zeige, dass dann $|z + z^{-1}| < 2$.

2.18. Polynomringe.

2.119. Berechne die Summe der Koeffizienten des Polynoms $p(x) = (x^2 - x + 1)^{2020} \in \mathbb{R}[x]$.

2.120. Gegeben ist das Polynom $p(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 23 \cdot x - 15 \in \mathbb{Z}[x]$.
Ermittle die Primfaktorzerlegungen von $p(63)$, $p(64)$, $p(65)$.

2.121. In dieser Aufgabe interessieren wir uns für die Nullstellen der folgenden Polynome:

$$p(x) = [1]_9 \cdot x^3 + [7]_9 \cdot x + [1]_9 \in \mathbb{Z}_9[x] \qquad \text{und} \qquad q(x) = [1]_3 \cdot x^3 + [1]_3 \cdot x + [1]_3 \in \mathbb{Z}_3[x]$$

a) Ermittle alle Nullstellen des Polynoms $q(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$.
b) Zeige: Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $[z]_9 \in \mathbb{Z}_9$ eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$. Dann ist $[z]_3 \in \mathbb{Z}_3$ Nullstelle des Polynoms $q(x)$.
c) Ermittle alle Nullstellen des Polynoms $p(x) \in \mathbb{Z}_9[x]$.

2.122. Wir definieren eine Folge von Polynomen $p_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ rekursiv durch $p_0(x) = 1$ und

$$p_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x) + 1.$$

a) Ermittle die Polynome $p_1(x)$, $p_2(x)$ und $p_3(x)$.

b) Stelle eine Vermutung für eine explizite Darstellung der Polynome $p_n(x)$ auf und beweise sie.

2.123. Wir definieren eine Folge von Polynomen $p_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ rekursiv durch $p_0(x) = 1$ und

$$p_{n+1}(x) = 2 \cdot x^2 \cdot p_n(x) + x.$$

a) Ermittle die Polynome $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ und $p_4(x)$.

b) Stelle eine Vermutung für eine explizite Darstellung der Polmyome $p_n(x)$ auf und beweise sie.

2.19. **Rekursiv definierte Folgen.**

2.124. Sei (x_n) eine Folge mit $x_0 > 0$ und $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Ermittle die ersten 5 Glieder der Folge wenn $x_0 = 1$.

b) Zeige: $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

c) Zeige: $x_n \leq s \implies s \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

d) Zeige: $x_n \geq s \implies s \geq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

e) Zeige, dass $(x_{2\cdot n})$ und $(x_{2\cdot n+1})$ monoton sind.

In dieser Aufgabe ist $s = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$ der Goldene Schnitt.

2.125. Sei $a > 0$. Sei $x_0 > 0$. Wir definieren die Folge (x_n) rekursiv mit Startwert x_0 so, dass gilt:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

a) Zeige: $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b) Berechne die ersten 5 Glieder der Folge, wenn $a = 2$ und i) $x_0 = 1$ ii) $x_0 = 2$.

c) Zeige:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2 \cdot x_n} \qquad \text{und} \qquad x_{n+2} - x_n = \frac{(a - x_n^2) \cdot (3 \cdot x_n^2 + a)}{4 \cdot x_n \cdot (x_n^2 + a)}$$

d) Zeige, dass abhängig vom Startwert genau eines der folgenden Szenarien eintritt:

i) $(x_{2\cdot n})$ ist monoton wachsend, $(x_{2\cdot n+1})$ ist monoton fallend, $x_{2\cdot n} \leq x_{2\cdot n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

ii) $(x_{2\cdot n+1})$ ist monoton wachsend, $(x_{2\cdot n})$ ist monoton fallend, $x_{2\cdot n+1} \leq x_{2\cdot n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

2.126. In dieser Aufgabe untersuchen wir Folgen (r_n), die die folgende Rekursion erfüllen:

$$r_{n+2} = 6 \cdot r_n - r_{n+1} \tag{6}$$

a) Wie lauten die ersten 5 Glieder der Folge (r_n), die die Rekursion (6) mit $r_0 = 1$ und $r_1 = 1$ erfüllt?

b) Existiert eine Folge (r_n), die (6) mit $r_0 = 1$ und $r_4 = 42$ erfüllt?

c) Zeige, dass die Folge (r_n) mit $r_n = 2^n$ die Rekursion (6) erfüllt.
d) Zeige, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0, 2$ gibt, sodass (r_n) mit $r_n = \lambda^n$ die Rekursion (6) erfüllt.
e) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass (r_n) mit $r_n = a \cdot 2^n + b \cdot \lambda^n$ die Rekursion (6) erfüllt. λ wie in c)
f) Gib ein explizites Bildungsgesetz für die Glieder der Folge aus a) an. Tipp: Wähle a, b aus e) passend.

2.127. Die Fibonacci Folge (f_n) ist durch $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ und die Rekursionsvorschrift

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

festgelegt. Die Glieder der Fibonacci Folge nennt man auch *Fibonacci Zahlen*.

a) Ermittle die ersten 10 Glieder der Fibonacci Folge.
b) Ist f_{2019} gerade oder ungerade?
c) Zeige, dass $\mathrm{ggT}(f_n, f_{n+1}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.
d) Zeige, dass für alle $k \geq 1$ und $n \geq 1$ gilt:

$$f_{n+k} = f_k \cdot f_{n+1} + f_{k-1} \cdot f_n$$

Schließe daraus, dass $\mathrm{ggT}(f_k, f_n) = \mathrm{ggT}(f_n, f_{n+k})$.
e) Sei (s_n) die Folge

$$s_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$$

Ermittle die ersten 10 Glieder der Folge (s_n) und vergleiche sie mit jenen von (f_n). Stelle eine Vermutung für einen Zusammenhang zwischen den jeweiligen Folgengliedern auf und beweise sie.
f) Zeige, dass jede positive natürliche Zahl N als Summe *lauter verschiedener* Fibonacci Zahlen geschrieben werden kann. Tipp: Überlege dir am Beispiel $N = 50$, wie so eine Zerlegung konkret ausschauen würde.
g) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f_k \cdot f_{k+2}} = 1 - \frac{1}{f_{n+1} \cdot f_{n+2}}$$

h) Finde ein explizites Bildungsgesetz für die Glieder der Fibonacci Folge.

2.128. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$. Zeige, dass die Rekursion

$$a_{n+2} = 2 \cdot \lambda \cdot a_{n+1} - \lambda^2 \cdot a_n$$

von der Folge (a_n) mit **a)** $a_n = \lambda^n$ **b)** $a_n = n \cdot \lambda^n$ erfüllt wird.

2.129. Finde ein explizites Bildungsgesetz der rekursiv bestimmten Folge (a_n).

a) $a_{n+2} = 6 \cdot a_{n+1} - 9 \cdot a_n$ wobei $a_0 = 3$ und $a_1 = 4$
b) $a_{n+2} = -8 \cdot a_{n+1} + 16 \cdot a_n$ wobei $a_0 = 7$ und $a_1 = -8$

2.130. ☆ Finde ein explizites Bildungsgesetz der rekursiv bestimmten Folge (a_n).

a) $a_{n+3} = 6 \cdot a_{n+2} - 11 \cdot a_{n+1} + 6 \cdot a_n$ wobei $a_0 = -2$ und $a_1 = -3$
b) $a_{n+3} = a_{n+2} + 8 \cdot a_{n+1} - 12 \cdot a_n$ wobei $a_0 = 6$ und $a_2 = 13$
c) $a_{n+3} = 3 \cdot a_{n+2} - 3 \cdot a_{n+1} + a_n$ wobei $a_0 = 1$ und $a_1 = 3$

Tipp: Finde zunächst alle $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass (a_n) mit $a_n = \lambda^n$ beziehungsweise $a_n = n \cdot \lambda^n$ die Rekursion (ohne Startbedingung) erfüllt.

2.20. ☆ **Geordnete Körper.**

In diesem Abschnitt sprechen wir über abstrakte Körper $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$. Die neutralen Elemente der Addition beziehungsweise der Multiplikation bezeichnen wir mit $0_\oplus$ beziehungsweise mit $1_\odot$. Wir nehmen stets an, dass der Körper *nicht-trivial* ist, also $0_\oplus \neq 1_\odot$. Wir schreiben $+$ für die Addition und $\cdot$ für die Multiplikation von natürlichen, ganzen, rationalen und schließlich von reellen Zahlen.

Ziel des Abschnitts ist vor allem zu zeigen, dass es bis auf natürliche Isomorphie nur einen vollständig geordneten Körper geben kann.

2.131. Sei $(\mathbb{K}, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$ ein geordneter Körper. Zeige, dass $x^2 \vartriangleright 0_\oplus$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq 0_\oplus$ gilt.

2.132. Seien $(\mathbb{K}, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$ ein geordneter Körper und (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$.
Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass (a_n) eine monotone Teilfolge enthält. Vgl. Satz von Weierstraß
Wir betrachten die folgende Menge: $O = \{n \in \mathbb{N} : a_n \trianglelefteq a_m \text{ für alle } m \geq n\}$.

a) O steht in dieser Aufgabe für Optimismus.
Erkläre in deiner Alltagssprache, weshalb.
b) Angenommen, O ist eine unendliche Menge.
Zeige: (a_n) enthält eine monoton wachsende Teilfolge.
c) Angenommen, O ist eine endliche Menge.
Zeige: (a_n) enthält eine monoton fallende Teilfolge.
d) Zeige: (a_n) hat eine monotone Teilfolge.

2.133. Sei $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ ein Körper. Wir definieren eine Folge (a_n) rekursiv wie folgt:

$$a_0 = 0_\oplus \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = a_n \oplus 1_\odot$$

a) Zeige, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:
i) $a_{m+n} = a_m \oplus a_n$ **ii)** $a_{m \cdot n} = a_m \odot a_n$
b) Zeige: Es gibt *genau zwei* Ringhomomorphismen $\varphi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{K}, \oplus, \odot)$.
c) Angenommen, $a_n \neq 0_\oplus$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$.
Sei $p = \min\{n \in \mathbb{N} : n > 0 \text{ und } a_n = 0_\oplus\}$.
Zeige, dass p eine Primzahl ist. Man sagt dann: *Der Körper hat Charakteristik p.*

d) Angenommen, $a_n \neq 0_\oplus$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$. Man sagt dann: *Der Körper hat Charakteristik* 0.
Zeige, es gibt einen einzigen Körperisomorphismus $\psi : (\mathbb{Q}, +, \cdot) \to (\mathbb{K}, \oplus, \odot)$.

Das Bild $\psi(\mathbb{Q})$ ist ein Unterkörper. Üblicherweise identifizieren wir $\mathbb{Q}$ mit diesem Unterkörper, denken also $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{K}$.

2.134. Sei $(\mathbb{K}, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$ ein *geordneter* Körper.

a) Zeige: Der Körper hat Charakteristik 0.
b) Angenommen, die Menge $\mathbb{N}_\mathbb{K} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.
Zeige: Es existiert *keine* kleinste obere Schranke für $\mathbb{N}_\mathbb{K}$.
c) Zeige, dass der *einzige* Körpermonomorphismus $\psi : (\mathbb{Q}, +, \cdot) \to (\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ ordnungserhaltend ist, dass also gilt:

$$p \leq q \implies \psi(p) \trianglelefteq \psi(q)$$

Eine „Kopie“ der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist also „ordentlich“ als Unterkörper in $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ enthalten.

2.135. Sei $(\mathbb{K}, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$ ein geordneter Körper, in dem $\mathbb{Q}$ unbeschränkt ist.

Ein solcher Körper heiß archimedisch geordnet.

a) Sei $x \in \mathbb{K}$. Zeige, dass es genau ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $m \trianglelefteq x$ und $x \triangleleft m + 1$.

Tipp: Argumentiere, dass $\{k \in \mathbb{Z} : k \trianglelefteq x\}$ in $\mathbb{Z}$ nach oben beschränkt ist.

b) Sei $x \in \mathbb{K}$. Zeige, dass es genau ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $10^{-k} \cdot m \trianglelefteq x$ und $x \triangleleft 10^{-k} \cdot (m + 1)$

Hinweis: Die Dezimaldarstellung läßt grüßen.

c) Seien $x, y \in \mathbb{K}$ mit $x \triangleleft y$. Zeige, dass es ein $p \in \mathbb{Q}$ gibt, sodass $x \triangleleft p \triangleleft y$.

2.136. Sei $(\mathbb{K}, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$ ein *vollständig* geordneter Körper.
Sei $x \in \mathbb{K}$. Wir wollen zeigen, dass $x = \sup\{p \in \mathbb{Q} : p \triangleleft x\}$.

a) Zeige, dass $x \trianglelefteq \sup\{p \in \mathbb{Q} : p \triangleleft x\}$.
b) Zeige, dass $\sup\{p \in \mathbb{Q} : p \triangleleft x\} \trianglelefteq x$.

Tipp: Ein Teil folgt unmittelbar aus der Definition des Supremums. Der andere Teil braucht die archimedische Eigenschaft.

2.137. Seien $(\mathbb{K}_1, \oplus_1, \odot_1, \trianglelefteq_1)$ und $(\mathbb{K}_2, \oplus_2, \odot_2, \trianglelefteq_2)$ *zwei* vollständig geordnete Körper. Beweise: Es gibt genau einen ordnungserhaltenden Körperisomorphismus $\psi : (\mathbb{K}_1, \oplus_1, \odot_1) \to (\mathbb{K}_2, \oplus_2, \odot_2)$.

2.21. ☆ **Dedekind Schnitte.**

Hier zeigst du, dass es auch wirklich einen vollständig geordneten Körper gibt, nämlich die reellen Zahlen. Aus den Ergebnissen des vorangehenden Abschnitts siehst du, dass die reellen Zahlen bis auf natürliche Isomorphie der einzige solche Körper sind.

Ein **Unterschnitt** ist eine Teilmenge U der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) Für jedes $p \in U$ existiert ein $q \in U$ mit $p < q$.

Also: U enthält keine größte Zahl.

ii) Für jedes $q \in U$ sind auch alle $p \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ in U enthalten.

Also: Liegt eine Zahl in U, dann liegen auch alle noch kleineren rationalen Zahlen in U.

Ein Unterschnitt $U \subseteq \mathbb{Q}$ heißt **echt**, wenn $U \neq \emptyset$ und $U \neq \mathbb{Q}$.

2.138. Sei $q \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die folgende Menge ein echter Unterschnitt ist:

$$U(q) = \{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$$

2.139. Sei $U \subseteq \mathbb{Q}$ ein echter Unterschnitt mit $U \neq U(0)$.
Zeige, dass genau eine der folgenden beiden Alternativen zutrifft:

i) Es gibt $p \in U$ mit $p > 0$.
ii) Es gibt $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < 0$ und $q \notin U$.

2.140. Sei $(U_s)_{s \in S}$ eine Familie von Unterschnitten. Wir betrachten ihre Vereinigung:

$$U = \bigcup_{s \in S} U_s$$

a) Zeige, dass U ein Unterschnitt ist.
b) Verdeutliche dir die beiden folgenden, grundlegenden Eigenschaften:
  i) Jeder Unterschnitt aus $(U_s)_{s \in S}$ ist im Unterschnitt U enthalten.
  ii) U ist in jedem Unterschnitt, der alle $(U_s)_{s \in S}$ enthält, enthalten.

2.141. Sei $U \subseteq \mathbb{Q}$ ein echter Unterschnitt.
Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ sowohl $p \in U$ also auch $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \notin U$ gibt, sodass gilt:

$$q = p + \frac{1}{n}$$

Tipp: Sei $p = \frac{k}{n}$ wobei $k = \max\left\{\ell \in \mathbb{Z} : \frac{\ell}{n} \in U\right\}$.

Die Folgen, die wir fortan hier betrachten, sind allesamt Folgen rationaler Zahlen.

Eine Folge (c_n) ist **Cauchy**, wenn es zu jedem rationalen $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$|c_n - c_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq k$$

Also: Zu jeder noch so kleinen Toleranz gibt es einen Index, ab dem an alle Glieder der Folge innerhalb dieser Toleranz voneinander liegen.

2.142. Zeige: Jede Cauchy Folge ist beschränkt.

2.143. Wir stellen hier den Zusammenhang zwischen echten Unterschnitten und Cauchy Folgen vor.

a) Sei (u_n) eine Cauchy Folge.
Zeige, dass die folgende Menge ein echter Unterschnitt ist:

$$U = \{p \in \mathbb{Q} : \text{ es gibt } q \in \mathbb{Q} \text{ und } k \in \mathbb{N}, \text{ sodass } p < q \text{ und } q \le u_n \text{ für alle } n \ge k \text{ gilt}\} \tag{7}$$

Wir nennen U den von der Cauchy Folge (u_n) **bestimmten** Unterschnitt.

b) Sei umgekehrt $U \subseteq \mathbb{Q}$ ein echter Unterschnitt.
Zeige, dass es eine Cauchy Folge (u_n) gibt, sodass (7) gilt.

c) Seien (u_n) und $(\tilde{u}_n)$ zwei Cauchy Folgen. Zeige:

$$(u_n) \text{ und } (\tilde{u}_n) \text{ bestimmen denselben Unterschnitt } \iff (u_n - \tilde{u}_n) \text{ ist eine Nullfolge}$$

2.144. Wir definieren auf der Menge der Cauchy Folgen eine Relation wie folgt:

$$(c_n) \sim (\tilde{c}_n) \iff (c_n - \tilde{c}_n) \text{ ist eine Nullfolge}$$

a) Zeige: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Also: Äquivalente Cauchy Folgen bestimmen denselben Unterschnitt, und umgekehrt.

b) Seien (u_n) und $(\tilde{u}_n)$ sowie (v_n) und $(\tilde{v}_n)$ jeweils äquivalente Cauchy Folgen.
Zeige, dass die beiden jeweils gegebenen Folgen äquivalente Cauchy Folgen sind:
i) $(u_n + v_n)$, $(\tilde{u}_n + \tilde{v}_n)$ **ii)** $(u_n \cdot v_n)$, $(\tilde{u}_n \cdot \tilde{v}_n)$ **iii)** $(-u_n)$, $(-\tilde{u}_n)$

Auf der Menge *aller* echten Unterschnitte

$$\mathbb{D} = \{U \subseteq \mathbb{Q} : U \text{ ist ein echter Unterschnitt}\}$$

definieren wir nun zwei binäre Operationen

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D} \qquad \text{und} \qquad \odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

wie folgt: Seien U und V echte Unterschnitte, die jeweils von den Cauchy Folgen (u_n) und (v_n) bestimmt werden. Dann sind $U \oplus V$ und $U \odot V$ jene Unterschnitte, die jeweils von den Cauchy Folgen $(u_n + v_n)$ und $(u_n \cdot v_n)$ bestimmt werden.

2.145. Zeige: $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ ist ein kommutativer Ring mit Nullelement $U(0)$ und Einselement $U(1)$.

2.146. Sei $U \subseteq \mathbb{Q}$ ein echter Unterschnitt.

a) Angenommen, es gibt $p \in U$ mit $p > 0$.
Zeige, dass es eine Cauchy Folge (u_n) gibt, die U bestimmt, sodass $p \le u_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Angenommen, es gibt $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < 0$ und $q \notin U$.
Zeige, dass es eine Cauchy Folge (u_n) gibt, die U bestimmt, sodass $u_n \le q$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Zeige, dass in jeder der beiden Alternativen Folgendes zutrifft.
Die Folge (v_n) mit $u_n \cdot v_n = 1$ ist Cauchy und bestimmt einen Unterschnitt V mit $U \odot V = 1_{\odot}$.

2.147. Zeige, dass $(\mathbb{D}, \oplus, \odot, \subseteq)$ ein vollständig geordneter Körper ist.

2.148. Zeige, dass die folgende Abbildung ein Monomorphismus zwischen geordneten Körpern ist:

$$\varphi : (\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq) \to (\mathbb{D}, \oplus, \odot, \subseteq), \qquad p \mapsto U(p)$$

2.149 (Dezimaldarstellung)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{Q}$ ein echter Unterschnitt und (d_n) die Folge mit Gliedern

$$d_n = m_n \cdot 10^{-n} \qquad \text{wobei} \qquad m_n = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \cdot 10^{-n} \in U\}.$$

a) Wie lautet die Folge (d_n) für die speziellen Unterschnitte $U = U(1)$ und $U = U(-1)$?
b) Zeige: i) $d_n \in U$ ii) $d_n + 10^{-n} \notin U$ iii) $d_n \leq d_{n+1}$ iv) $d_{n+1} < d_n + 10^{-n}$
c) Zeige:

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(d_n)$$

Ein **Oberschnitt** ist eine Teilmenge O der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) Für jedes $q \in O$ existiert ein $p \in O$ mit $p < q$.
Also: O enthält keine kleinste rationale Zahl.
ii) Für jedes $p \in O$ sind auch alle $q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ in O enthalten.
Also: U enthält gemeinsam mit jeder Zahl auch alle noch größeren rationalen Zahlen.

Ein Oberschnitt $O \subseteq \mathbb{Q}$ heißt **echt**, wenn $O \neq \emptyset$ und $O \neq \mathbb{Q}$.

Sei $p \in O$. Dann ist $O(p) = \{q \in \mathbb{Q} : p < q\}$ ein echter Oberschnitt.

2.150 (Dedekind Schnitte)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{Q}$ ein echter Unterschnitt und

$$O = \{q \in \mathbb{Q} : \text{es gibt ein } p \in \mathbb{Q} \text{ mit } p < q \text{ und } p \notin U\}$$

a) Zeige, dass O ein echter Oberschnitt ist.
b) Zeige, dass $U \cap O = \emptyset$.
c) Zeige, dass genau eine der folgenden Alternativen wahr ist:
i) $U \cup O = \mathbb{Q}$
ii) Es gibt $p \in \mathbb{Q}$, sodass $U = U(p)$ und $O = O(p)$.

Das Tupel (U, O) ist ein **Dedekind Schnitt** und jeder Dedekind Schnitt ist ein Tupel dieser Form. Je nachdem, welche Alternative zutrifft, heißt der Dedekind Schnitt i) **irrational** oder ii) **rational**.

3. CURRICULA

3.1. **BEd Mathematik.** Modulziele der StEOP des BEd Mathematik (Unterrichtsfach):

Die Studierenden erwerben die inhaltlichen und methodischen Grundlagen für das fachliche Studium. Der Schwerpunkt liegt in der Überwindung der Diskontinuität zwischen Schul- und Hochschulmathematik durch die V ermittlung der mathematischen Fachsprache, grundlegender mathematischer Werkzeuge, des nötigen Formalismus sowie mathematischer Beweismethoden. Die Studierenden haben die Möglichkeit, dieses theoretische Grundlagenwissen im Rahmen von selbständig zu lösenden Aufgaben praktisch anzuwenden. Die folgenden Inhalte sind abzudecken: Mathematische Sprache und Denkweise, Summen- und Produktschreibweise, Indexschreibweise, Beweismethoden (Induktion, direkt, indirekt), Grundlagen der Aussagenlogik, naive Mengenlehre (Vereinigung, Durchschnitt, etc), Äquivalenzrelationen, Abbildungen (injektiv, surjektiv, bijektiv), Gruppe, Ring, Körper, Zahlbereiche (natürliche, ganze und rationale Zahlen), Restklassen, Euklidischer Algorithmus, Teilbarkeit, Primfaktorzerlegung.

3.2. **BSc Mathematik.** Modulziele der StEOP des BSc Mathematik (Fachstudium):

Dieses Modul bildet die Studieneingangs- und Orientierungsphase (StEOP). Hier werden die inhaltlichen und methodischen Grundlagen für das gesamte Studium gelegt. Der Schwerpunkt liegt in der Vermittlung der mathematisch abstrakten Denkweise sowie der Fachsprache. Die Studierenden erhalten eine Einführung in die Benutzung der PC-Labors der Fakultät für Mathematik sowie der vorhandenen Infrastruktur für Selbsttests über den Schulstoff und für E-Learning. Sie erhalten eine Einführung in die Benutzung mathematischer Software auf der Basis des Schulstoffs. Eventuelle Lücken im Schulstoff (bis zum Maturaniveau) werden mit Unterstützung durch von TutorInnen geleitete Workshops selbständig aufgearbeitet. Die folgenden mathematischen Inhalte sind abzudecken: mathematische Sprache und Denkweise, elementare Logik, naive Mengenlehre (Relationen, Abbildungen), grundlegende algebraische Strukturen (Gruppe, Ring, Körper), Zahlenbereiche ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)*, Vollständigkeit* ($\sup$, $\inf$)*, Restklassen (mod* n)*, euklidischer Algorithmus,* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ *als Vektorraum, elementare Geometrie in Ebene und Raum.*