Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Maria Charina und Stefan Haller

DAUER: 60 Minuten

STEOP: Modulprüfung - Einführung in die Mathematik
1. Termin am 17.12.2018, 9:45-11:15Uhr in HS 1, HS 4 und HS 14

Prüfungseinsicht: 19.12.2018, 16:00-17:00Uhr im HS 13

Nachname: .... Vorname: ....

Matrikelnummer: .... Studienkennzahl: ....

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

Sie können maximal 40 Punkte erreichen. Mit mindestens 20 Punkten ist die Prüfung bestanden.

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Notenskala:

Note	5	4	3	2	1
Punkte	< 20	$20 - 24$	$25 - 29$	$30 - 34$	≥ 35

Aufgabe 1: .... (7 Punkte)

(i) Definieren Sie den Begriff *Surjektivität* für eine Abbildung $f : A \to B$.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Abbildung $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{x} + 2$ ist injektiv.

(i) Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt surjektiv, wenn

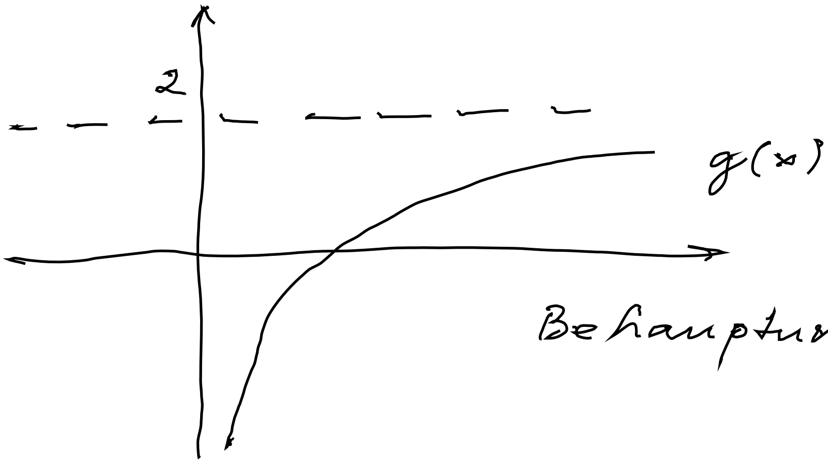
$$\forall b \in B \;\; \exists a \in A \;:\; f(a) = b$$

(ii) z.z.: g ist injektiv

Beweis:

$$\forall x_1, x_2 \in (0, \infty) \;:\; g(x_1) = -\frac{1}{x_1} + 2 = g(x_2) = -\frac{1}{x_2} + 2 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{x_2} \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

$\square$



Behauptung: g injektiv

Aufgabe 2: .... (8 Punkte)

Beweisen Sie **mittels vollständiger Induktion**: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ist $n^2 + n$ gerade.

Beweis:

I.A.: für $n = 1$ gilt $1^2 + 1 = 2$ ist gerade.

I.V.: Es gelte (für ein $n \geq 1$) $n^2 + n$ gerade.

I.S.: z.z: $(n+1)^2 + (n+1)$ ist gerade.

Es gilt

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2(n+1).$$

Da $2(n+1)$ gerade ist und nach I.V. $n^2 + n$ auch gerade ist, folgt, dass $(n+1)^2 + (n+1)$ gerade ist.

$\square$

Aufgabe 3: .... (7 Punkte)

Ergänzen Sie die folgende Tabelle und geben Sie die entsprechenden Rechenschritte an.

z	$\overline{z}$	$\frac{1}{z}$	$\lvert z\rvert$	$0 \le \phi = \arg(z) < 2\pi$
$e^{\frac{\pi}{3}i}$	$e^{\frac{5\pi}{3}i}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1	$\frac{\pi}{3}$
$-1+i$	$-1-i$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}i}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$

1)

$$\frac{1}{z} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Rightarrow \quad |z| = 1,\ \overline{z} = e^{-\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{5\pi}{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

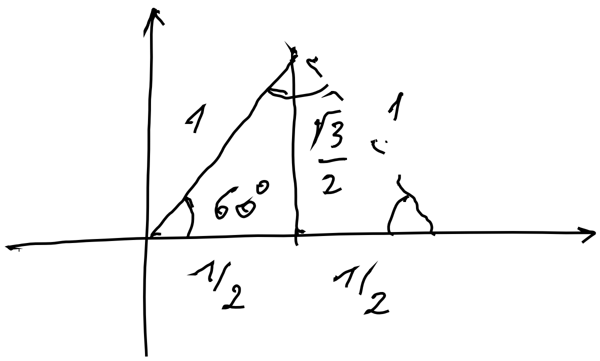
oder

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Leftrightarrow z = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \ldots = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2)

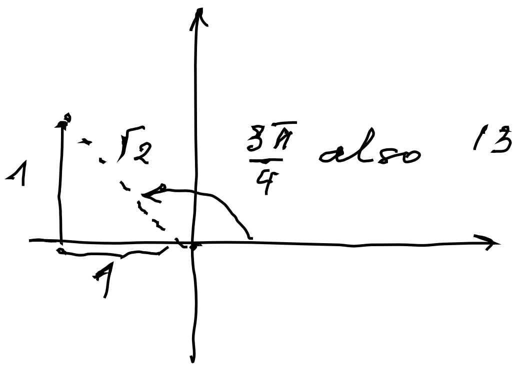
$$z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = -1+i \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = -1-i, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

1)



60° also $\frac{\pi}{3}$

2)



$\frac{3\pi}{4}$ also 135°

Aufgabe 4: .... (8 Punkte)

(i) Bestimmen Sie $f \circ g$ für die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to [1, \infty),\ f(x) = x^2 + 1 \quad \text{und} \quad g : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x-1},$$

falls diese Abbildung $f \circ g$ existiert.

(ii) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung (falls diese existiert) von $f : [0, \infty) \to [-1, \infty),\ f(x) = x^2 - x$.

Geben Sie die entsprechenden Definitions- und Zielbereiche an oder begründen Sie, warum die Abbildung in (i) oder in (ii) nicht existiert.

(i)

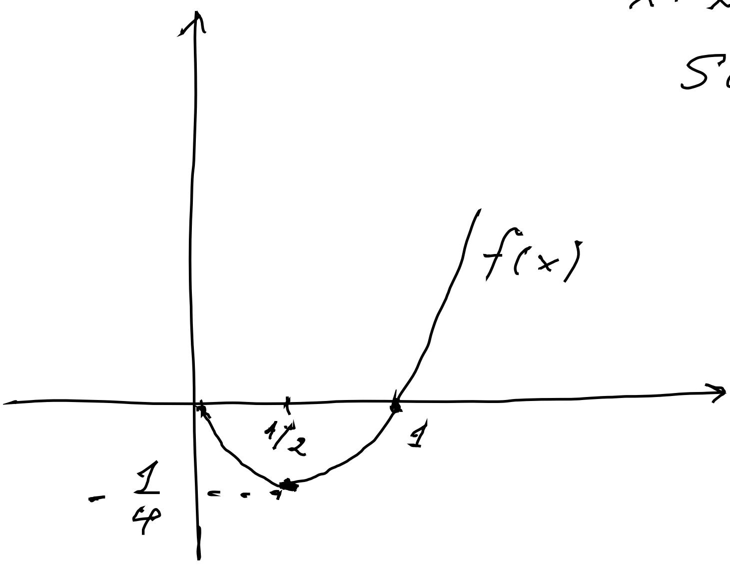
$$f \circ g : [1, \infty) \to [1, \infty), \quad (f \circ g)(x) = f\,(g(x)) = f\left(\sqrt{x-1}\right) = x.$$

(ii) Die Abbildung f ist nicht surjektiv (z.B. $y = -1$ ist außerhalb des Wertebereichs) oder nicht injektiv (z.B. $f(0) = f(1)\ \wedge\ x_1 = 0 \neq x_2 = 1$) $\Rightarrow$ Umkehrabbildung existiert nicht (ist nicht definiert).

$x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

Scheitelpunkt:

$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$



Aufgabe 5: .... (5 Punkte)

Für $p = q = 1$ (wahr) und $r = 0$ (falsch) bestimmen Sie den Wahrheitswert von

$$\big((p \Rightarrow q) \vee (q \Leftrightarrow \neg r)\big) \veebar r \ = 1.$$

da

$1 \Rightarrow 1$ wahr

$1 \Leftrightarrow \neg 0$ wahr

$1 \vee 1$ wahr

$1 \veebar 0$ wahr

Aufgabe 6: .... (5 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils nur eine Antwort an. Jede richtige Antwort wird mit +1 Punkt und jede falsche Antwort mit −1 Punkt bewertet. Ist die so erhaltene Gesamtpunktzahl negativ, runden wir sie auf 0 auf.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{k=0}^{n-1} 4^{3k+2} = \prod_{k=1}^{n} 4^{3k-1}$.

- ■ Wahr
- ☐ Falsch

(b) Welche der folgenden Aussagen ist wahr für beliebige Mengen A und B?

- ☐ $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) \setminus B = A$.
- ■ $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) \setminus B = \emptyset$.

(c) Für jede Menge M definiert $\subseteq$ eine Totalordnung auf $\mathcal{P}(M)$.

- ☐ Wahr
- ■ Falsch

(d) Wurde mit 1 bewertet, wegen missverstaendlicher Angabe.

(e) Die Inverse von $\overline{7}$ im $(\mathbb{Z}_{15}, \cdot)$ ist

- ■ $\overline{-2}$
- ☐ $\overline{5}$