Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Maria Charina und Stefan Haller

DAUER: 60 Minuten

STEOP: Modulprüfung - Einführung in die Mathematik
3. Termin am 30.01.2019, 08:00-09:30 Uhr in HS 1 und HS 14

Prüfungseinsicht: 01.03.2019, 13:30-14:30Uhr im Raum 11.122

Nachname: .... Vorname: ....

Matrikelnummer: .... Studienkennzahl: ....

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

Sie können maximal 40 Punkte erreichen. Mit mindestens 20 Punkten ist die Prüfung bestanden.

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Notenskala:

Note	5	4	3	2	1
Punkte	< 20	$20 - 24$	$25 - 29$	$30 - 34$	≥ 35

Aufgabe 1: .... (6 Punkte)

(i) Definieren Sie den Begriff *neutrales Element* einer Gruppe $(G, \circ)$.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Verknüpfung $\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \otimes b = a \cdot b - 2$ ist assoziativ.

Aufgabe 2: .... (8 Punkte)

Beweisen Sie **mittels vollständiger Induktion**: Für alle $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Aufgabe 3: .... (6 Punkte)

Ergänzen Sie die folgende Tabelle und geben Sie die entsprechenden Rechenschritte an.

z	$\overline{z}$	z^2	$\|z\|^2$	$0 \leq \phi = \arg(z) < 2\pi$
		$-i$		$\pi \leq \phi < 2\pi$
			2	$\frac{5\pi}{4}$

Aufgabe 4: .... (7 Punkte)

(i) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) + 1$ und die Mengen $A = [0, \pi)$ und $B = [-1, 1]$ bestimmen Sie die Bildmenge $f(A)$ und die Urbildmenge $f^{-1}(B)$.

(ii) Für die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin(x + 1) \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2.$$

bestimmen Sie die Funktion $f \circ g$, falls diese existiert. Geben Sie gegebenenfalls den Definitions- und Bildbereich von $f \circ g$ an.

Aufgabe 5: .... (8 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus die ganzen Zahlen n und m, so dass $\mathrm{ggT}(25, 11) = n \cdot 25 + m \cdot 11$.

Geben Sie alle Rechenschritte an.

Aufgabe 6: .... (5 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils nur eine Antwort an. Jede richtige Antwort wird mit +1 Punkt und jede falsche Antwort mit −1 Punkt bewertet. Ist die so erhaltene Gesamtpunktzahl negativ, runden wir sie auf 0 auf.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} 6^{i+j} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} 2^i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} 3^j \right)$.

☐ Wahr

☐ Falsch

(b) Seien p, q Aussagen. Eine Verneinung von $p \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ist

☐ $\neg p \wedge (\neg p \Rightarrow q)$

☐ $\neg p \wedge (\neg p \vee \neg q)$

(c) Alle reellen Lösungen von $x + 1 < |x|$ erfüllen

☐ $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$

☐ $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

(d) Die Unkehrfunktion von $f : [1, \infty) \to [-1, \infty)$, $f(x) = x^2 - 2x$ existiert.

☐ Wahr

☐ Falsch

(e) Sei M eine nicht leere Menge. Die Relation $\subseteq$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(M)$.

☐ Wahr

☐ Falsch