Zur Verfügung gestellt von:
Adrian Constantin
UE Analysis, SoSe 2019
LV-Nr.: 250028
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

ÜBUNGEN

1. Finden Sie die Stammfunktionen:
(i) $\int (ax+b)^n \, \mathrm{d}x$ auf $I = \mathbb{R}$, wobei a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$;
(ii) $\int e^x \cos(x) \, \mathrm{d}x$ auf $I = \mathbb{R}$.

2. Finden Sie die Stammfunktionen:
(i) $\int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x$ auf $I = (0, \infty)$;
(ii) $\int \frac{1}{\sin^n(x)} \, \mathrm{d}x$ auf $I = (0, \pi)$, für $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

3. Finden Sie die Stammfunktionen:
(i) $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, \mathrm{d}x$ mit $a > 0$ und b, $c \in \mathbb{R}$, auf einem Intervall I auf welchem $ax^2 + bx + c$ streng positiv ist;
(ii) $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, \mathrm{d}x$ mit $a < 0$ und b, $c \in \mathbb{R}$, auf einem Intervall I auf welchem $ax^2 + bx + c$ streng positiv ist.

4. (i) Finden Sie die Stammfunktion $\int \frac{1}{x^3 + x^5} \, \mathrm{d}x$ auf $I = (0, \infty)$ durch Zerlegung in einfache rationale Funktionen mittels Primfaktoren des Nenners.
(ii) Finden Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von $S_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, \mathrm{d}x$ auf $I = \mathbb{R}$, für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5. Beweisen Sie, daß die Funktion $F = f^2$, wobei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \end{cases}$$

keine Stammfunktion besitzt, obwohl sie die Darboux-Eigenschaft hat.
[Bemerkung: f hat eine Stammfunktion (siehe die Vorlesung).]

6. Mittels gleichmässiger Zerlegungen und der Wahl von Zwischenpunkten der entsprechenden Riemannschen Zwischensummen unter den Teilpunkten, zeigen Sie daß $\int_0^a x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}$ für alle $a > 0$ gilt[1].

7. Mittels gleichmässiger Zerlegungen und der Wahl von Zwischenpunkten der entsprechenden Riemannschen Zwischensummen unter den Teilpunkten, zeigen Sie daß $\int_0^a x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{a^4}{4}$ für alle $a > 0$ gilt[2].

8. Mittels gleichmässiger Zerlegungen und der Wahl von Zwischenpunkten der entsprechenden Riemannschen Zwischensummen unter den Teilpunkten, zeigen Sie daß $\int_0^a x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{a^5}{5}$ für alle $a > 0$ gilt[3].

---

[1] Hinweis: beweise induktiv die Identität $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

[2] Hinweis: beweise induktiv die Identität $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

[3] Hinweis: beweise induktiv die Identität $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

9. Man zeige, mittels Ober- und Untersummen für Zerlegungen von $[a,b]$ mit Zwischenpunkten $x_k = ac^{\frac{k}{n}}$ für $k \in \{0,\cdots,n\}$, wobei $c = b/a$, daß $\int_a^b x^p \,\mathrm{d}x = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$ für $b > a > 0$ und $p > 0$ gilt.

10. Beweisen Sie, daß $\int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{ab} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ für $b > a > 1$ gilt, indem Sie die Beziehung als $\int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_b^{ab} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ schreiben und ausnutzen, daß jede Zerlegung $1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ von $[1,a]$ einer Zerlegung $b = x_0 b < x_1 b < \cdots < x_n b = ab$ von $[b,ab]$ entspricht (und umgekehrt).

11. (i) Beweisen Sie, daß falls die Funktionen $f_1,\ f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind, dann ist auch die Funktion $\max\{f_1,f_2\}$ integrierbar. Gilt[4]

$$\int_a^b \max\{f_1(x),\ f_2(x)\}\,\mathrm{d}x = \max\Big\{\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x\,,\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\Big\}\,?$$

(ii) Falls die Funktionen $f_1,\ f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind, dann ist auch die Funktion $f_1 f_2$ integrierbar (siehe die Vorlesung). Gilt

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\,\mathrm{d}x = \Big(\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\Big)\,?$$

12. Ermitteln Sie (mittels Beweis oder eines Gegenbeispiels) ob für integrierbare Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to (0,\infty)$ die Funktion f/g integrierbar sein muss.

13. Die Theorie besagt daß $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ eine lineare Abbildung auf der Menge $\mathcal{R}[a,b]$ der integrierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist. Auf der Menge $\mathcal{B}[a,b]$ der beschränkten Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kann man das Unterintegral und das Oberintegral definieren. Untersuchen Sie mit Hilfe der Funktionen

$$f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}\,, \quad f_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]\,, \\ 0 \text{ falls } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a,b]\,, \end{cases}$$
$$f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}\,, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]\,, \\ 1 \text{ falls } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a,b]\,, \end{cases}$$

ob diese Abbildungen von $\mathcal{B}[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ linear sind.

14. Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $\int\limits_0^1 x^2 e^x \,\mathrm{d}x$;

(ii) $\int\limits_0^\pi x^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

15. Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $\int\limits_1^2 \log(x)\,\mathrm{d}x$;

(ii) $\int\limits_0^\pi \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$.

---

[4]Hinweis: betrachte anschaulich die Flächeninhalte, die von den Funktionen $f_1,\ f_2 : [0,1] \to [0,1]$, $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = 1 - x$ für $x \in [0,1]$, definiert sind.]

16. Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $\int\limits_0^{\pi} e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$;

(ii) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$.

17. Benutzen Sie das Riemann-Integral um $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\right)$ zu berechnen.

18. Benutzen Sie das Riemann-Integral um $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$ zu berechnen[5].

19. Falls die stetige Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ die Beziehung $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ erfüllt, beweisen Sie, daß es ein $x^*\in[0,1]$ gibt mit $f(x^*)=x^*$.

20. Geben Sie eine Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ an, die eine Stammfunktion besitzt und nicht integrierbar ist.

21. Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$;

(ii) $\int\limits_0^{1}\frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

22. Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie, daß

$$\int_0^x\Big(\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u\,,\qquad x\in[0,1]\,.$$

23. (i) Sei $a>0$ und $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend mit $f(0)=0$. Bezeichnet g die Umkehrfunktion von f, beweisen Sie[6] daß

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^y g(s)\,\mathrm{d}s\ge xy$$

für alle $x\in[0,a]$ und $y\in[0,f(a)]$. Zeigen Sie, daß Gleichheit genau dann antritt, wenn $y=g(x)$.

(ii) Zeigen Sie, daß für beliebige $p>1$ und $q>1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ die Ungleichung $xy\le\frac{1}{p}\,x^p+\frac{1}{q}\,y^q$ für alle $x,y\ge 0$ gilt.

24. Berechne das Integral $\int_1^4\sqrt{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

25. Berechne das Integral $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

26. Berechne das Integral[7] $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\cos(x)}}\,\mathrm{d}x$.

[5]Hinweis: betrachte den Logarithmus des Ausdrucks.

[6]Hinweis: betrachte Flächeninhalte.

[7]Hinweis: die Substitution $t=\frac{\pi}{2}-x$ hilft.

27. Sei $a > 0$ und $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine ungerade stetige Funktion (d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$). Zeigen Sie, daß $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

28. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion (d.h. die Ableitung f' ist stetig). Man zeige:

$$\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (x-m)f'(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

wobei $m = \frac{1}{2}(a+b)$.

29. Untersuchen Sie die Funktionsfolge $\{f_n\}_{n\geq 1} : I \to \mathbb{R}$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz::
(i) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ für $I = \mathbb{R}$;
(ii) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ für $I = [1, \infty)$.

30. Untersuchen Sie die Funktionsfolge $\{f_n\}_{n\geq 1} : I \to \mathbb{R}$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz::
(i) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ für $I = [0, 1]$;
(ii) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ für $I = [0, \infty)$.

31. Untersuchen Sie die Funktionsfolge $\{f_n\}_{n\geq 1} : I \to \mathbb{R}$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz::
(i) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ für $I = [\frac{1}{2}, 1]$;
(ii) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ für $I = [0, 1]$.

32. Zeigen Sie, daß die Funktionsfolge $\{f_n\}_{n\geq 1}$ mit $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^2}$ punktweise aber nicht gleichmäßig gegen $f \equiv 1$ auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

33. Beweisen Sie, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{1+e^x}{(1+n+x)^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

34. Beweisen Sie, daß falls die stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ konvergieren, dann ist f integrierbar und $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Gilt die Aussage falls die Konvergenz nur punktweise ist?

35. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int\limits_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Beweisen Sie daß $f \equiv 0$.

36. Man zeige, daß die durch $f(0) := 1$, $f(x) := \frac{e^x - 1}{x}$ für $x \neq 0$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reel analytisch ist.

37. Man zeige, daß die Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ im Intervall $(-1, 1)$ reel analytisch ist und durch die *binomische Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}$ dargestellt wird, wobei die Binomialkoeffizienten durch die Ausdrücke

$$\binom{\alpha}{0} := 1\,, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdots k} \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{gegeben sind.}$$

38. Finden Sie[8] die Summe der Reihe $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots$ für $x \in (-1, 1)$.

39. Finden Sie[9] die Summe $f(x)$ der Reihe $\frac{x^2}{2 \cdot 1} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} \cdots$ für $x \in (-1, 1)$. Gibt es die Grenzwerte $\lim_{x \to 1^\pm} f(x)$, und stimmen diese mit der Reihenformel für $x = \pm 1$ überein?

40. Beweisen Sie die folgende Ergänzung des Abelschen Grenzwertsatzes: falls die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Koeffizienten $a_n \geq 0$ (für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) den endlichen Konvergenzradius $R > 0$ hat, und falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ bestimmt divergiert, dann gilt $\lim_{x \to R^-} f(x) = \infty$.

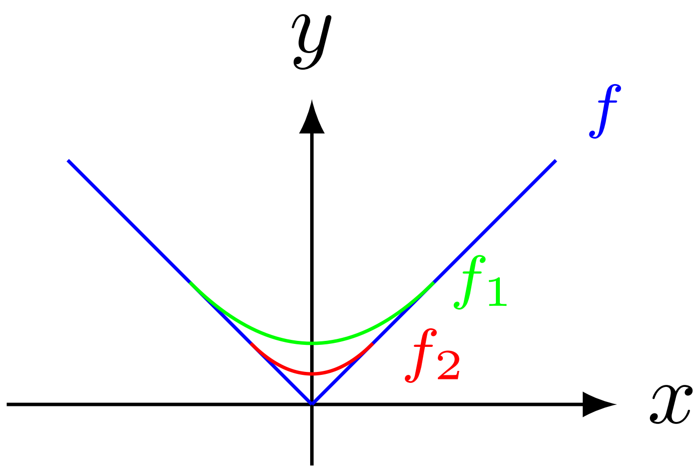

Figure 1. Zur geometrischen Deutung der Aufgabe 41.

41. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, daß es eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \geq 1}$ gibt, die gleichmäßig gegen f auf $[-1, 1]$ konvergiert, und obwohl jede der Funktionen f_n differenzierbar ist, ist f in $x = 0$ nicht differenzierbar[10].

42. Zeigen Sie anhand des Beispiels $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$, daß es eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen $\{f_n\}_{n \geq 1}$ gibt, die gleichmäßig gegen die stetig differenzierbare Funktion f auf $[-1, 1]$ konvergiert, ohne daß $f'(0) = \lim_{n \to \infty} f_n'(0)$ gilt.

[8] Hinweis: was ist $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$?

[9] Hinweis: zweimal differenzieren.

[10] Man versuche, das anschauliche Bild mit Formeln zu bestätigen, indem man für $f(x) = |x|$ die Funktion $f_n(x)$ derart definiert, daß sie mit $f(x)$ für $|x| \geq \frac{1}{n}$ übereinstimmt, während $f_n(x)$ für $|x| < \frac{1}{n}$ durch ein Polynom zweiten Grades gegeben ist.

43. Sei $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 1/n \text{ für } x \in [0,n]\,, \\ 0 \text{ für } x \in (n,\infty)\,, \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\geq 1}$ gleichmäßig gegen 0 auf $[0,\infty)$ konvergiert, aber dennoch gilt[11] $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$.

44. (Satz von der majorisierten Konvergenz) Sei $\{f_n\}_{n\geq 1}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft daß $f_n \rightrightarrows f$ (gleichmäßig konvergiert) auf jedem Intervall $[a,b]$. Falls es eine stetige Funktion $g : [a,\infty) \to [0,\infty)$ gibt, für die $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ und mit der Eigenschaft daß $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in N$, zeigen Sie, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

45. Man zeige, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^\infty \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^p\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^\infty e^{-t} t^p\,\mathrm{d}t$ für $p > -1$ gilt.

46. Mit der Angabe daß $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

47. Man beweise die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\log(n)}{n^s}$ für $s > 1$, und die Divergenz der Reihe für $s \leq 1$.

48. Man zeige, daß das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty \sin(e^x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

49. Man untersuche für welche Werte von $n \in \mathbb{N}$ das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[n]{x^n+1}}{x^n+n}\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

50. Man zeige, daß $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$, wobei beide uneigentliche Integrale konvergieren aber nur eines absolut konvergent ist.

51. Man zeige: für jede Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ gilt

$$\|x+y+z\| \leq \|x\| + \|y\| + \|z\|\,, \qquad x,y,z \in \mathbb{R}^n\,.$$

[11]Uneigentliche Integrale umfassen einen Grenzwertübergang und deshalb gelten nicht die üblichen Integrationsregeln.

52. Man zeige[12], daß für die euklidische Norm $\|(x_1,\ldots,x_n)\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$ einer Summe von N Vektoren $X^1,\ldots,X^N$ gilt

$$\Big\|\sum_{j=1}^{N} X^j\Big\|^2 \le N\sum_{j=1}^{N}\|X^j\|^2\,.$$

53. Man zeige, daß durch $\|x\|_1 := \sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$ für $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

54. Man skizziere die Mengen der Punkte $x\in\mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_1 = 1$ bzw. $\|x\|_* = 1$, wobei $\|(x_1,x_2)\|_* := \max\{|x_1|,|x_2|\}$.

55. Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Man zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) x und y sind orthogonal (d.h. $\langle x,y\rangle = 0$, wobei $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ für $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ und $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$);
(ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$;
(iii) $\|x\|\le\|x+\lambda y\|$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}$;
(iv) $\|x+y\| = \|x-y\|$.

Interpretiere diese Äquivalenzen geometrisch.

56. Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Man zeige, daß $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ möglich ist nur falls $x\in\mathbb{R}^n$ und $y\in\mathbb{R}^n$ kollineare Vektoren sind (d.h., es gibt ein $\lambda\in\mathbb{R}$ mit $x=\lambda y$ oder mit $y=\lambda x$).

57. Beweise die Aussage der Übung 56 für eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, die aus einem Skalarprodukt entstammt. Weiter, gebe ein Beispiel einer Norm auf $\mathbb{R}^n$ für die die Aussage der Übung 56 falsch ist.

58. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, die aus einem Skalarprodukt entstammt. Man zeige, daß falls die Beziehung $\|\lambda x+(1-\lambda)y\| = \|x\|$ für alle $\lambda\in[0,1]$ gilt, dann ist $x=y$ (u.a. bedeutet dies, daß die Einheitssphäre $\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|=1\}$ keine flache Teile aufweist – vergleiche mit Übung 54).

59. Sei $X=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 :\ 0\le x\le m\,,\ 0\le y\le n\}$, wobei $n,m\in\mathbb{N}$. Die *Manhattan-Metrik*[13] auf X wird als $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$ definiert. Man zeige, daß d die Eigenschaften einer Metrik aufweist. Weiter, anhand einer Skizze, zeigen Sie daß ein Taxifahrer unterschiedliche Wege, von $(1,1)$ ausgehend, nehmen kann, die die gleiche Weglänge haben, vorausgesetzt, er nähert sich stetig dem Ziel $(5,3)$. Hingegen, entlang einer Avenue oder Street, ist der kürzeste Weg eindeutig und von der euklidischen Metrik gegeben.

[12] Hinweis: betrachte die Vektoren $(X_k^1,X_k^2,\ldots,X_k^N)\in\mathbb{R}^N$ für $1\le k\le n$.

[13] In der Manhattan-Insel in New York sind die Straßen in einem schachbrettartigen Muster (“Avenues” verlaufen von Norden nach Süden und “Streets” von Ost nach West), so daß man das Gitter als ein Netz von Straßen auffassen, das ein Taxifahrer durchfährt, wobei die Kreuzungen die Orte sind, die er anfahren kann.

60. (Metrik des französischen TGV[14]) Bezeichne P (für Paris) einen beliebigen Punkt in $\mathbb{R}^2$ und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Wir definieren $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ durch

$$d(X,Y) = \begin{cases} \|X-Y\| \text{ falls } X,\, Y \text{ auf einer Geraden durch } P \text{ liegen}\,, \\ \|X-P\| + \|Y-P\| \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Skizzieren Sie jeweils die Menge aller Punkte, die von $X := P + (4,0)$ bzw. $Y = P + (1,0)$ Distanz 2 bezüglich d haben.

61. (Hyperbolische Entfernung im offenen Einheitskreis) Sind $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ zwei Punkte im Einheitskreis $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 1\}$, so beträgt ihre Entfernung im hyperbolischen Raum[15]

$$d(P_1,P_2) = 2\tanh^{-1}\Big(\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{\sqrt{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}}\Big)\,,$$

wobei $\tanh(s) = \frac{e^s-e^{-s}}{e^s+e^{-s}}$ eine bijektive Abbildung $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ definiert.

(i) Man prüfe, daß $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ bijektiv und wachsend ist.

(ii) Man zeige, daß durch diese Metrik[16] die euklidische Längenmessung verzerrt wird, da die Entfernung zwischen $(1-\varepsilon, 0)$ und dem Ursprung $(0,0)$ unendlich wird wenn wir uns mit $\varepsilon \to 0^+$ dem Randpunkt $(1,0)$ annähern.

(ii) Man zeige, dass die offene Kugel (bezüglich der hyperbolischen Metrik) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $\varepsilon > 0$ mit einer euklidischen offenen Kugel übereinstimmt. Gilt dies auch für die offene Kugel (bezüglich der hyperbolischen Metrik) mit Mittelpunkt $(0.5,0)$ und Radius $\varepsilon > 0$?

62. (i) Man zeige, daß für $P_1(x_1,y_1)$ und $P_2(x_2,y_2)$ im Einheitskreis $\mathbb{D}$ gilt

$$d(P_1,P_2) = 2\tanh^{-1}\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_2\overline{z_1}}\right| \text{ mit } z_1 = x_1+iy_1,\ z_2 = x_2+iy_2 \in \mathbb{C}\,,$$

wobei d die in der Übung 61 definierte hyperbolische Distanz d ist.

(ii) Prüfen Sie, dass $d^*(P_1,P_2) = \left|\frac{z_1-z_2}{1-z_2\overline{z_1}}\right|$ eine Metrik auf $\mathbb{D}$ definiert[17].

63. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $O \subset X$ eine offene Menge. Man zeige, daß O eine Untermenge des Inneren des Abschlusses $\overline{O}$ von O ist.

[14]Der Name leitet sich von dem zentralisiert angelegten Schnellbahnnetz Frankreichs ab, bei dem alle Bahnverbindungen auf Paris zulaufen. Die Konsequenz davon ist, dass man z.B. bei einer Bahnfahrt von Straßburg nach Lyon einen 400 km langen Umweg über Paris in Kauf nehmen muss.

[15]Er erfüllt die Axiome der euklidischen Geometrie mit Ausnahme des Parallelenaxioms und spielt eine wichtige Rolle in der theoretischen Physik (Kosmologie).

[16]Die Positivität und die Symmetrie von d sind trivial, während die Dreiecksungleichung schwieriger ist.

[17]Hinweis: man kann annhehmen, daß die hyperbolische Distanz d eine Metrik ist, und die Formel $\tanh(t+s) = \frac{\tanh(t)+\tanh(s)}{1+\tanh(t)\tanh(s)}$ benutzen. Sei auch bemerkt, daß $\tanh(s+t) \leq \tanh(s)+\tanh(t)$ für $s,t > 0$ gilt, da die zweite Ableitung der Funktion $(-\tanh)$ positiv ist (d.h., die Funktion ist konvex). Demzufolge erwingt $t = (1-\lambda)0 + \lambda(t+s)$ mit $\lambda = \frac{t}{t+s} \in (0,1)$ die Beziehung $-\tanh(t) \geq -\frac{t}{t+s}\tanh(t+s)$, während aus $s = (1-\mu)0 + \mu(t+s)$ mit $\mu = \frac{s}{t+s} \in (0,1)$ die Beziehung $-\tanh(s) \geq -\frac{s}{t+s}\tanh(t+s)$ folgt.

Man prüfe anhand des Beispiels

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x < 1\}$$

(bezüglich der euklidischen Distanz auf $\mathbb{R}^2$) ob O gleich mit dem Inneren des Abschlusses $\overline{O}$ von O sein muß.

64. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Gilt die Aussage: eine Menge $O \subset X$ hat denselben Rand wie der Abschluss $\overline{O}$ von O?

65. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist es möglich, daß für eine Menge $O \subset X$ das Innere die leere Menge $\emptyset$ ist, während X das Innere des Abschlusses $\overline{O}$ von O ist?

66. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist es möglich, daß die einzigen konvergenten Folgen $\{x_n\}_{n\ge1}$ ab einem Index konstant sind (d.h., es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x_N$ für alle $n \ge N$)?

67. Zeigen Sie: Grenzwerte konvergenter Folgen in metrischen Räumen sind eindeutig.

68. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

(a) Zeigen Sie: für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ sind die *partiellen Funktionen* $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(a, y)$, und $h_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, b)$, stetig.

(b) Ist f stetig[18] in $(0, 0)$?

69. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(-x/e)$. Zeigen Sie, dass genau ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $a \cdot e^{a/e} = 1$ und überdies gilt $0 < a < 1$.

70. (a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap K = \emptyset$. Zeigen Sie[19]: es gibt ein $c > 0$ derart, daß $d(x, y) \ge c$ für alle $x \in A$ und alle $y \in K$ gilt.

(b) Geben Sie ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ (mit der euklidischen Metrik) an, das belegt, dass die Aussage in (a) falsch wird, wenn K nur als abgeschlossen vorausgesetzt wird.

71. Zeigen Sie: eine Menge $O \subset \mathbb{R}$ (mit der euklidischen Metrik) ist offen, wenn und nur wenn es endlich oder abzählbar unendlich viele disjunkte Intervalle $\{(a_i, b_i)\}_{i\in I}$ gibt, so daß $O = \bigcup_{i\in I} (a_i, b_i)$.

72. Zeigen Sie: man kann die offene Menge $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$ (mit der euklidischen Metrik) nicht als Vereiningung von disjunkte offene Kugeln darstellen[20] (d.h., eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Aufgabe 71 fällt aus).

[18] Hinweis: Berechnen Sie $\lim_{r\downarrow0} f(r, r)$. Bemerkung: diese Schlussfolgerung steht nicht im Widerspruch zu dem Satz aus der Vorlesung, wo Äquivalenz der Stetigkeit von Abbildungen in den $\mathbb{R}^n$ zur Stetigkeit aller Komponentenfunktionen gezeigt wurde.

[19] Hinweis: $X \setminus A$ ist offen und enthält alle Punkte aus K; überdecken Sie K mit geeigneten Kugeln.

[20] Hinweis: betrachte die Diagonale $\{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < 1\}$.

73. Die Achsenprojektionen in $\mathbb{R}^2$ sind die Abbildungen $(x,y) \mapsto x$ und $(x,y) \mapsto y$. Zeigen Sie (für die euklidische Metrik): ist $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, dann sind beide Projektionen auf den Achsen kompakt. Gilt die Aussage auch falls $K \subset \mathbb{R}^2$ nur abgeschlossen ist?

74. Sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein reelles Polynom. Zeigen Sie: falls es ein $m > 0$ gibt, so daß $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq m$ gilt, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $f(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq m$. Hingegen ist die Aussage für $f(x,y) = (xy-1)^2 + y^4$ falsch, obwohl $f(x,y) > 0$ auf $\mathbb{R}^2$.

75. Beweisen Sie: falls die Menge $A \subset X = \mathbb{R}^2$ (mit der euklidischen Metrik) beschränkt ist, dann ist die Menge[21] $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \inf\limits_{y \in A}\{d(x,y)\} \leq \varepsilon\}$ kompakt für alle $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, daß die Aussage für allgemeine metrische Räume (X,d) falsch ist.

76. Man bestimme die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen f, g, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $g(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $h(x,y) = \sin(xy)$.

77. Seien $a \neq b$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^3$ und setze $f(x) = \frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|}$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{a,b\}$. Was sind die kritischen Punkte von f?

78. Für $(r,\theta,\varphi) \in (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$ definiert

$$f(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

die Kugelkoordinaten. Man berechne die Jacobimatrix Df und die Jacobideterminante J_f.

79. Seien f, $g \in C^1(U,\mathbb{R})$, wobei $u \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist. Zeigen Sie: $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ und $\nabla(1/f) = -f^{-2}\nabla f$ überall wo $f \neq 0$.

80. Zeigen Sie: jedes Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der Gestalt

$$v(x_1,x_2,x_3) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3,\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)\,,$$

wobei $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leq j \leq 3$, läßt sich in der Form $v = u + w$ mit $\operatorname{curl} u = 0$ und $\operatorname{div} w = 0$ schreiben (solche Vektorfelder u und w heißen *wirbelfrei* bzw. *quellenfrei*).

81. Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad (x_1,x_2) = (0,0)\,, \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{für} \quad (x_1,x_2) \neq (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie die Existenz der partiellen Ableitungen $D_1 f(0,0)$ und $D_2 f(0,0)$, obwohl f in $(0,0)$ nicht stetig ist.

---

[21] Für $x \in X$ bezeichnet $d(x,A) := \inf\limits_{y \in A}\{d(x,y)\}$ den Abstand zur Menge A.

82. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge[22] und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: gilt $D_1 f(x) = 0$ für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, so hängt f nur von $x_2, \dots, x_n$ ab. Überzeugen Sie sich anhand des Beispiels

$$U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x_1, 0) : \; x_1 \geq 0\}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 \text{ für } & x_1 < 0 \text{ oder } x_2 < 0, \\ x_2^2 \text{ für } & x_1 \geq 0 \text{ und } x_2 > 0, \end{cases}$$

daß die Konvexität von U nicht ohne weiteres vernachläßigt werden kann.

83. [Doppelte und iterierte Grenzwerte] Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: falls

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(x_1^*,x_2^*)} f(x_1, f_2) = \mathfrak{L} \quad \text{und} \quad \lim_{x_2 \to x_2^*} f(x_1, f_2) = L(x_1)$$

für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $|x_1 - x_1^*| < \varepsilon$ existieren, so gilt $\lim\limits_{x_1 \to x_1^*} L(x_1) = \mathfrak{L}$, während für

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad x_2 = 0, \\ x_2 + x_1 \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) \quad \text{für} \quad x_2 \neq 0, \end{cases}$$

gilt $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2) = 0$ obwohl $\lim\limits_{x_1\to 0} \lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)$ nicht existiert.

84. Sei $f : \mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 = 1\} \to \mathbb{R}$ stetig (mit der euklidischen Metrik). Zeigen Sie: es gibt ein $x_0 \in \mathbb{S}^1$ mit $f(x_0) = f(-x_0)$.

85. Sei (X, d) ein metrischer Raum. X heißt zusammenhängend, wenn es keine Zerlegung von X in zwei disjunkte, nichtleere offene Mengen gibt[23]. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt zusammenhängend, wenn A mit der Metrik von X ein zusammenhängender Raum ist.

(i) Zeigen Sie: X ist zusammenhängend, falls X nicht in zwei disjunkte nichtleere abgeschlossene Mengen zerlegt werden kann.

(ii) Finden Sie die zusammenhängende Untermengen von $\mathbb{R}$, für die euklidische Metrik.

86. Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine zusammenhängende Untermenge (mit der euklidischen Metrik). Ist der Rand ∂M eine zusammenhängende Menge?

87. Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume. Zeigen Sie:

(i) Falls $M \subset X$ eine zusammenhängende Menge ist, so ist $f(M) \subset Y$ auch eine zusammenhängend.

(ii) Falls $Y = \mathbb{R}$ (mit der euklidischen Distanz) und $y \in [f(a), f(b)]$, wobei $a, b \in X$, dann gibt es ein $c \in X$ mit $f(c) = y$.

88. Ein metrischer Raum (X, d) heißt wegzusammenhängend falls es für alle $x, y \in X$ einen Weg von x nach y in X gibt, d.h. eine stetige Abbildung $w : [0, 1] \to X$ mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$. Zeigen Sie:

(i) Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.

(ii) In $\mathbb{R}^2$ ist die Vereinigung des Graphen der Funktion $f : (0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ mit dem Abschnitt der y-Achse zwischen -1 und 1, mit der

[22] Konvex bedeutet: für alle $x, y \in U$ liegt die Verbindungsstrecke $\{\lambda x + (1 - \lambda) y : \; \lambda \in [0, 1]\}$ in U.

[23] D.h. falls $O_1, O_2 \subset X$ offen sind, mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $O_1 \cap O_2 = X$, dann folgt $O_1 = \emptyset$ oder $O_2 = \emptyset$.

von $\mathbb{R}^2$ induzierten euklidischen Metrik, kompakt und zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

(iii) Ist $O \subset \mathbb{R}^n$ (mit der euklidischen Distanz) offen und zusammenhängend, dann ist O wegzusammenhängend.

89. Zeigen Sie, für

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad (x_1, x_2) = (0,0)\,, \\ \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0)\ : \end{cases}$$

(i) f, $D_{x_1} f$, $D_{x_2} f$ sind stetig auf $\mathbb{R}^2$.
(ii) $D_{x_1 x_2} f$, $D_{x_2 x_1} f$ existieren auf $\mathbb{R}^2$ und sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(iii) $D_{x_1 x_2} f(0,0) = 1$ und $D_{x_2 x_1} f(0,0) = -1$.

90. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Falls $\|f(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, zeigen Sie, daß $\langle f(t), f'(t) \rangle = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

91. Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad (x_1, x_2) = (0,0)\,, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2 x_2 - \frac{4x_1^6 x_2^2}{(x_1^4 + x_2^2)^2} & \text{für} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie:
(i) f ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.
(ii) Für $\theta \in [0, 2\pi)$ hat die Funktion[24] $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Theta(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta)$ für $t \in \mathbb{R}$, ein striktes lokales Minimum an der Stelle $t = 0$.
(iii) $(0,0)$ ist kein lokales Minimum für f.

92. (i) Ist das Vektorfeld (e^{xy}, e^{x+y}) ein Gradientenfeld auf $\mathbb{R}^2$? Wenn ja, finden Sie ein entsprechendes Potential.

(ii) Ist das Vektorfeld $(2x\cos(y), -x^2\sin(y))$ ein Gradientenfeld auf $\mathbb{R}^2$? Wenn ja, finden Sie ein entsprechendes Potential.

93. Wie lautet[25] die Taylor-Entwicklung dritter Ordnung für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x^2+y}$, um $(0,0)$?

94. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) = xy^2$ jeweils lokale und globale Maxima und Minima auf:
(i) der offenen Kreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
(ii) dem Einheitskreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
(iii) der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

95. (i) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(ii) Bestimmen Sie in $\mathbb{R}^3$ die Punkte auf dem Schnitt der Sphäre $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit der Ebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ mit minimalen bzw. maximalen Abstand zum Ursprung.

---

[24] Die Beschränkung von f auf den Geraden durch Punkte $(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{S}^2$.

[25] Hinweis: statt der allgemeinen Formel mit Multiindizes, nutzen Sie daß die Exponentialfunktion vorkommt.

96. Zeigen Sie, daß die Gleichung $x^3 + 4y^2 + 8xz^2 - 3z^3y - 1 = 0$ in der Nähe des Punktes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch eine implizite Funktion $z = h(x, y)$ lösbar ist.

97. Eine periodische Schwingung $f(t)$ mit Frequenz $\omega > 0$ und Periode $T = 2\pi/\omega$ kann nach Fourier in seine harmonischen Bestandteile zerlegt werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_b \sin(n\omega t)\}\,, \quad t \in [0, T]\,.$$

(i) Falls die Konvergenz der Fourierreihe gleichmäßig auf $[0, T]$ ist[26], zeigen Sie, daß man die Fourierkoeffizienten dieser Zerlegung aus den Integralformeln berechnen kann:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\,dt\,,\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\,dt\,,\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\,dt\,.$$

(ii) Falls f die Einschränkung einer periodischen Funktion der Klasse C^1 auf $[0, T]$ ist, beweisen Sie die folgende Beziehung zwischen den Fourierkoeffizienten $\{A_n, B_n\}_{n \geq 1}$ der Ableitung f' und den Fourierkoeffizienten $\{a_n, b_n\}_{n \geq 1}$ von f: $A_n = n\omega b_n$ und $B_n = -n\omega a_n$. Was passiert für $n = 0$?

[26] Unter welchen Umständen dies der Fall ist, ist technisch nicht einfach und wird in der Vorlesung über Fourieranalysis untersucht.