Name:

Matr.Nr.:	Stud.KZahl:

Einführung in die Analysis (WS 2018)

Prüfungstermin: 6. Februar 2019 (Dauer: 120 Minuten)

Zur Verfügung gestellt von:
Adrian Constantin
PR Einführung in die Analysis, WiSe 2018/19
LV-Nr.: 250011
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

$\boxed{1}$ (i) [10%] Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+2}{n^2+n+1}$.

(ii) [10%] Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ für $n \geq 1$, konvergent ist, und finden Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

$\boxed{2}$ (i) [10%] Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + a\,, & x \leq 0\,, \\ x + 1\,, & x > 0\,, \end{cases}$ stetig ist.

(ii) [10%] Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert und, wenn ja, berechnen Sie es: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

$\boxed{3}$ (i) [10%] Bestimmen Sie, in welchen Intervallen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 3$, monoton steigend oder fallend ist. Finden Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion.

(ii) [10%] Für welche Werte von $\alpha \geq 0$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq 0\,, \\ x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0\,, \end{cases}$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

$\boxed{4}$ (i) [10%] Beweisen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Mittels eines Beispiels zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ nicht unbedingt differenzierbar ist.

(ii) [10%] Formulieren und beweisen Sie den Satz von Rolle.

$\boxed{5}$ (i) [10%] Beweisen Sie, dass eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie strikt monoton ist.

(ii) [10%] Formulieren und beweisen Sie das Konvergenkriterium von Leibniz für alternierende Reihen.

1	2	3	4	5	Total

$\boxed{1}$ (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+2}{n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 3$ aus den Rechenregeln mit konvergenten Folgen, da $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

(ii) Wir berechnen die ersten Folgeglieder: $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{7} > x_1$, $x_3 = \sqrt{6+\sqrt{7}} > x_2$ und vermuten dass die Folge wachsend ist. Das kann man induktiv beweisen. Tatsächlich, $x_1 < x_2$ und, unter der Voraussetzung $x_{k+1} > x_k$, gilt $x_{k+2} = \sqrt{x_{k+1}+6} > \sqrt{x_k+6} = x_{k+1}$. Somit ist die Folge konvergent wenn und nur wenn sie nach oben beschränkt ist. Wäre die Folge konvergent, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, so wäre $L = \sqrt{L+6}$ wegen dem Grenzübergangs $n \to \infty$ in der rekursiven Gleichung. Somit wäre $L > 0$ und $L^2 = L + 6$, eine quadratische Gleichung deren Lösungen $L_1 = -2$ und $L_2 = 3$ sind. Da nur $L > 0$ in Frage kommt, ist $L = 3$ der einzig mögliche Grenzwert. Da $x_1 = 1$ und die Folge wachsend ist, sehen wir dass $x_n \leq 3$ für alle $n \geq 1$ notwendig für Konvergenz wäre. Das kann man wiederum induktiv beweisen. Tatsächlich, $x_1 < 3$ und, unter der Voraussetzung $x_k < 3$, gilt $x_{k+1} = \sqrt{x_k+6} < \sqrt{9} = 3$. Wir haben somit gezeigt, dass die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Deshalb ist die Folge konvergent. Den Grenzwert haben wir schon als $L = 3$ identifiziert.

$\boxed{2}$ (i) Da die Funktion f als ein polynomialer Ausdruck auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0,\infty)$ gegeben wird, ist f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, unabhänging vom Wert von a. Um die Stetigkeit in $x = 0$ zu untersuchen, bemerken wir dass f seitliche Grenzwerte in $x = 0$ aufweist, mit $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = a$. Da $f(0) = a$, folgern wir dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist wenn und nur wenn $a = 1$.

(ii) Da $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - 1) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, handelt es sich hier um den unbestimmten Ausdruck $\left(\frac{0}{0}\right)$. Die Voraussetzungen des Satzes von l'Hospital sind erfüllt, da $(e^x - 1)' = e^x \to 1$ für $x \to 0$, während $x' = 1 \to 1$. Somit gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$.

$\boxed{3}$ (i) Da es sich um ein Polynom handelt, ist f differenzierbar. Wir berechnen

$$f'(x) = 16x^3 - 16x = 16x(x^2 - 1) = 16x(x-1)(x+1)\,.$$

Die Vorzeichentabelle der Ableitung lässt sich hiermit leicht bestimmen:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

Somit hat f drei kritische Punkte ($x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$), mit $f'(x) > 0$ auf $(-1, 0) \cup (1,\infty)$ bzw. $f'(x) < 0$ auf $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, d.h. f ist streng monoton fallend auf $(-\infty, -1)$, streng monoton wachsend auf $(-1, 0)$, streng monoton fallend auf $(0, 1)$, und streng monoton wachsend auf $(1,\infty)$. Somit sind $x_1 = -1$ und $x_3 = 1$ lokale Minimierer, während $x_2 = 0$ ein lokaler Maximierer ist. Wir berechnen $f(\pm 1) = -1$ und $f(0) = 3$. Da $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $f(x) = 4(x^2 - 1)^2 - 1 \geq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sehen wir dass ± 1 globale Minimierer sind, während 0 nur ein lokaler Maximierer von f ist.

(ii) Für jedes $\alpha \geq 0$ ist f auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar, mit

$$f'(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0\,, \\ \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0\,. \end{cases}$$

Falls f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, muss f in $x = 0$ differenzierbar sein und f' muss in $x = 0$ stetig sein, d.h. $f'(0) \in \mathbb{R}$ existiert und, da klarerweise $Df^-(0) = 0$,

$$f'(0) = 0 = \lim_{x \to 0+} \left\{ \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right\}.$$

Weil beide Funktionen $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ schnell für $x \to 0+$ oszillieren, indem jeweils alle Werte aus $[-1, 1]$ unendlich oft angenommen werden, macht es Sinn, den obigen Ausdruck entlang der Folge $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ mit $n \in \mathbb{N}$ genauer zu untersuchen. Es gilt

$$f'(x_n) = -x_n^{\alpha-2} = -(2n\pi)^{2-\alpha}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Damit $\lim_{n \to \infty} f'(x_n) = 0$, muss $\alpha > 2$, d.h. $\alpha > 2$ ist notwendig damit f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Wir behaupten, dass dies auch hinreichend ist. Tatsächlich, falls $\alpha > 2$ haben wir dass

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = x^{\alpha-1} \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^{\alpha-1} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 0+\,,$$

und somit existiert $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$, d.h. $Df^+(0) = 0$. Klarerweise gilt $Df^-(0) = 0$ und somit ist f in $x = 0$ differenzierbar, mit $f'(0) = 0$. Weiter haben wir:

$$\left| \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \alpha x^{\alpha-1} \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| + x^{\alpha-2} \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \alpha x^{\alpha-1} + x^{\alpha-2} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 0+\,,$$

so dass f' stetig in $x = 0$ ist.

$\boxed{4}$-$\boxed{5}$ Siehe die Vorlesungsunterlagen.