Zur Verfügung gestellt von:
Adrian Constantin
UE Einführung in die Analysis, WiSe 2018/19
LV-Nr.: 250012
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

ÜBUNGEN

1. Zeigen Sie: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! k \in \mathbb{Z}:\ k \leq x < k+1$. Wir nennen dann $[x] := k$ (die sog. Gaußklammer) das *größte Ganze von x*. Damit definieren wir eine Funktion $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$. Skizzieren Sie ihren Graphen.

2. Für $a > 0$ und $b > 0$ zeige man: $2 \leq a/b + b/a$.

3. Man beweise: Ist M eine nichtleere Menge reeller Zahlen mit $\inf M > 0$, so ist die Menge $M' = \{1/m :\ m \in M\}$ nach oben beschränkt, und es gilt $\sup M' = 1/\inf M$.

4. Man zeige: Ist r rational und x irrational, so ist $r+x$ irrational; weiterhin ist auch rx irrational, sofern $r \neq 0$ ist.

5. Man zeige, daß zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen stets eine Irrationalzahl liegt.

6. Mittels Induktion ist zu zeigen:
(i) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$;
(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ für $n \in \mathbb{N}$.

7. Man beweise: $n^{1/n} \leq 1 + 2/\sqrt{n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

8. Man beweise: Ändert man endlich viele Glieder einer konvergenten Folge ab, so ändern sich weder Konvergenzverhalten noch Grenzwert.

9. Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Ist die Folge $\{a_n\}_{n\geq 1}$ konvergent? Beweisen Sie Ihre Behauptung direkt durch Rückgriff auf die Definition der Konvergenz.

10. Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n\geq 1}$ mit $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$ gegen 1 konvergiert. Finden Sie zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ explizit ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$ stets $|a_n - 1| < \varepsilon$ gilt.
(Hinweis: Bernoulli-Ungleichung.)

11. Entscheiden Sie jeweils welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegen. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

$$\text{(a) } a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3 - 1} \qquad \text{(b) } b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

12. Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel!)
(a) $\{a_{n+1} - a_n\}_{n\geq 1}$ ist Nullfolge $\iff$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ ist konvergent.
(b) Sei $0 < q < 1$ und $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < a_{n+1} \leq q \cdot a_n$. Dann ist $\{a_n\}_{n\geq 1}$ eine Nullfolge.

13. Bestimmen Sie jeweils $\lim_{n\to\infty} a_n$, falls der Grenzwert existiert.

(a) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(3n^2+2n+1)(2n-1)}$ (b) $a_n = \dfrac{n^3+4}{2n^2+n+1}$.

14. Man beweise: Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $b_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

15. Man beweise: $\frac{1+|a|}{1+|b|} \leq 1+|a-b|$ und $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

16. Man beweise: $|a+b|+|a-b| \geq |a|+|b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

17. Man beschreibe die Menge der Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit: (i) $|x-1|+|x+1| < 4$; (ii) $x \leq |1-x|$; $x^2-3x+2 < 0$.

18. Eine Folge $\{b_n\}_{n\geq 1}$ heißt *Umordnung* der Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\geq 1}$, wenn $b_n = a_{\sigma(n)}$ gilt für alle $n \geq 1$, wobei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung ist. Ist die Umordnung einer Nullfolge eine Nullfolge?

19. Die Intervallschachtelung ermöglicht uns, ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{a}$ für eine vorgegebene reelle Zahl $a > 0$ zu erdenken. Zunächst ermitteln wir die größte Zahl $g \in \mathbb{N}$, so daß $g^2 \leq a$. Sei $I_1 = [g, g+1]$ und bilden $x_1 := \frac{a_1+b_1}{2}$. Gilt $x_1^2 \leq a$, so setzen wir $a_2 := x_1$, $b_2 := b_1$; anderenfalls wird $a_2 := a_1$, $b_2 := x_1$ gewählt. Nun halbieren wir $I_2 = [a_2, b_2]$ durch den Punkt $x_2 := \frac{a_2+b_2}{2}$ und vergleichen x_2^2 mit a. Ist $x_2^2 \leq a$, so setzen wir $a_3 := x_2$, $b_3 := b_2$, anderenfalls $a_3 := a_2$ und $b_3 := x_2$. Auf dieser Weise entsteht eine Intervallschachtelung $\{I_n\}_{n\geq 1}$ mit $x_n \in I_n = [a_n, b_n]$ und $a \in [a_n^2, b_n^2]$ für alle $n \geq 1$. Man beweise: $\sqrt{a}$ ist der Punkt, der in allen Intervallen I_n liegt.

20. Man beweise: die Irrationalzahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$.

21. Gibt es eine beschränkte Zahlenfolge, die k vorgeschriebene Werte x_1, x_2, ..., $x_k \in \mathbb{R}$ und nur diese als Häufungspunkte hat?

22. Sei $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$. Man zeige, daß für $c > 0$ und ein beliebig gewähltes Anfangselement $x_0 > 0$, die rekursiv durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{p}\left[(p-1)x_n + \frac{c}{x_n^{p-1}}\right], \qquad n \geq 0\,,$$

definierte Folge gegen $\sqrt[p]{c}$ konvergiert.

23. Seien $a > 0$ und $b > 0$ reelle Zahlen mit $a > b$. Wir definieren die Folgen $\{a_n\}_{n\geq 1}$ und $\{b_n\}_{n\geq 1}$ indem wir $a_1 := a$, $b_1 := b$ und $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}$ für $n \geq 1$ setzen. Man zeige, daß $b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ für alle $n \geq 1$ gilt, und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

24. Man zeige, daß die durch $x_1 := \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ definierte Folge konvergent ist. Was ist $\lim_{n\to\infty} x_n$?

25. Ist die folgende Behauptung richtig: "Eine reelle Zahlenfolge $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ist dann und nur dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt besitzt."?

26. Ist $\theta \in (0,1)$ und ist $\{x_n\}_{n\geq 1}$ eine Zahlenfolge mit $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \theta|x_{n+1} - x_n|$ für alle $n \geq 1$, so zeige man, daß $\{x_n\}_{n\geq 1}$ eine Cauchyfolge ist.

27. Man zeige, daß die durch $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1+x_n}$ für alle $n \geq 1$ definierte Folge eine Cauchyfolge ist, und bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

28. Beweisen Sie, daß die durch $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ für alle $n \geq 1$ definierte Zahlenfolge eine Cauchyfolge ist.

29. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Finden Sie die notwendige und hinreichende Bedingung damit die Zahlenfolge $\{x_n\}_{n\geq 1}$, die durch $x_1 = 0$ und $x_{n+1} = a + x_n^2$ für alle $n \geq 1$ definiert wird, konvergiert.

30. Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, daß man im Quotientenkriterium für Reihen die Bedingung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ für alle $n \geq N$ nicht durch die schwächere Bedingung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle $n \geq N$ ersetzen kann.

31. Zeigen Sie, daß das Quotientenkriterium nur hinreichend, aber nicht notwendig für die absolute Konvergenz einer Reihe ist.

32. Beweisen Sie, daß die Reihe $1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \cdots$ divergent ist.

33. Man zeige: gilt $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$ und ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent, so divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$.

34. Man beweise das **Wurzelkriterium**:

(i) Gibt es ein $q \in (0,1)$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für $n \geq N$ ist, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent.

(ii) Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

35. Eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *unbedingt konvergent*, wenn jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ derselben, wobei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung ist, ebenfalls konvergent ist und dieselbe Summe wie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ besitzt.

(i) Geben Sie ein Beispiel einer Reihe die konvergent, aber nicht unbedingt konvergent ist.

(ii) Beweisen Sie den **Satz von Dirichlet**: *Eine Zahlenreihe ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sie absolut konvergent ist.*

36. Beweisen Sie den **Satz von Riemann**: *Ist eine Reihe reeller Zahlen konvergent aber nicht absolut konvergent, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe, die x als Summe hat. Ferner gibt es Umordnungen die gegen ∞ bzw. $-\infty$ divergieren.*

37. (i) Beweisen Sie daß die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ keinen Grenzwert in $x_0 = 0$ besitzt.

(ii) Man beweise daß *Dirichlet's Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert besitzt.

38. Beweisen Sie, daß jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt $x^* \in [0,1]$ mit $f(x^*) = x^*$.

39. (i) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Beweisen Sie, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $f(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in [0,1]$.

(ii) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$. Falls $f(x) \neq 1$ für alle $x \in [0,1]$, beweisen Sie, daß $f(x) < 1$ für alle $x \in [0,1]$.

40. Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die unstetig ist, aber dennoch Intervalle auf Intervalle abbildet.

41. (i) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton. Man beweise, dass die Menge der Unstetigkeitstellen von f leer, endlich oder, falls unendlich, als Folge geschrieben werden kann.

(ii) Sei $\{a_n\}_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a_n \in [0,1]$ für alle $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass $f : [0,1] \to [0,1]$ mit $f(x) = \sum_{\{k:\ a_k \leq x\}} 2^{-k-1}$ eine monotone Funktion ist, dessen Menge der Unstetigkeitsstellen genau $\{a_n\}_{n\geq 1}$ ist[1].

42. Untersuchen Sie folgende Funktionen jeweils hinsichtlich Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung:

(i) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{1/3}$ (also die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^3$).

43. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

44. Sei $a \geq 0$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $p(x) = x^4 - 4ax^3$. Untersuchen Sie p bezüglich Monotonie und Extrema in Abhängigkeit vom Parameter a.

45. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{für } x \leq 1 \\ 8x - 3 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß die Funktion f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema und untersuchen Sie die Monotonieeigenschaften. Gibt es ein globales Minimum bzw. Maximum? Ist f zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

[1] Insbesondere kann $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ die Menge der Unstetigkeitsstellen einer Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sein. Man kann beweisen, daß es keine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, dessen Menge der Unstetigkeitsstellen gleich mit $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ ist.

46. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Man beweise für $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ die *Leibnizsche Regel*

$$D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} f \cdot D^k g \,.$$

47. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und *ungerade*, falls $f - (x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Man beweise: ist f differenzierbar und gerade (bzw. ungerade), so ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade (bzw. gerade).

48. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in (a, b)$ differenzierbar. Man zeige:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \,.$$

49. Seien $a < b$ reelle Zahlen. Beweisen Sie, daß falls $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ wachsend und differenzierbar ist, so gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Falls f streng wachsend ist, gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$?

50. Seien $a < b$ reelle Zahlen. Man finde den (eindeutig bestimmten) Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ für den die durch $f(x) = |x - a| + |x - b|$ bestimmte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den kleinsten Wert hat.

51. Beweisen Sie, daß unter allen Dreiecken gegebenen Flächeninhalts das gleichseitige Dreieck den kleinsten Umfang hat.

52. Seien $a < b$ reelle Zahlen. Beweisen Sie, daß falls $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig ist, und alle Punkte $x_0 \in (a, b)$ lokale Maximierer von f sind, dann ist f konstant auf (a, b). Gilt diese Aussage auch ohne der Stetigkeitsvoraussetzung?

53. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls es keinen Punkt $x_0 \in [0, 1]$ gibt mit $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, beweisen Sie, dass die Menge $\{x \in [0, 1] : \; f(x) = 0\}$ keine oder endlich viele Punkte hat.

54. Sei $y : (1, 4) \to (1, 4)$ eine surjektive und zweimal differenzierbare Funktion mit $y'(x)y''(x) \neq 0$ für alle $x \in (1, 4)$.

(i) Beweisen Sie, daß die Umkehrfunktion $x : (1, 4) \to (1, 4)$ existiert und zweimal differenzierbar ist.

(ii) Die Formel $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$ ist bekannt. Man zeige, daß $y''(x) = \frac{1}{x''(y)}$ nur für $y(x) = \frac{4}{x}$ gilt[2].

55. Veranschaulicht läßt sich der Mittelwertsatz geometrisch so deuten: falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar ist, gibt es ein $\theta \in (a, b)$ für den die Tangente zum Graphen $G(f)$ von f durch den Punkt $(\theta, f(\theta))$ parallel zur Sekante $\mathbf{L}$ durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$

[2] *Hinweis*: Sei $f(x) = y'(x)$. Dann gilt $y''(x) = \frac{df}{dy} \cdot f$ und $x''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2} \cdot \frac{df}{dy}$, so daß $f < 0$ und $\frac{dg}{dy} = \pm 1$ für $g = 2\sqrt{-f}$. Daher ist $G(y) = g(y) \mp y$ eine Konstante $a \in \mathbb{R}$, d.h. $f(y) = -(a \pm y)^2/4$ und $x'(y) = \frac{1}{f(y)} = -\frac{4}{(a \pm y)^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{4}{y \mp a}\right)$. Aus $\frac{d}{dy}\left(x(y) - \frac{4}{y \mp a}\right) = 0$ folgt nun, daß $x(y) = \frac{4}{y \mp a} + b$ für ein $b \in \mathbb{R}$. Berechne nun $\lim\limits_{y \to 1+} x(y)$ und $\lim\limits_{y \to 4-} x(y)$.

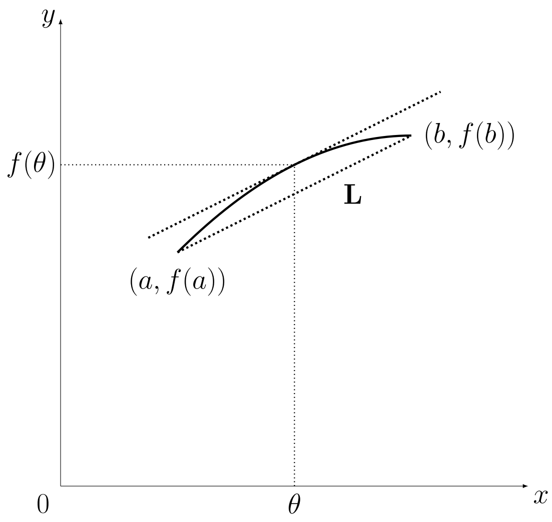

FIGURE 1. Zur geometrischen Deutung des Mittwelwertsatzes von Lagrange siehe Aufgabe 55.

ist. Betrachtet man die Figur 1, so bekommt man den Eindruck, daß die Tangente zu $G(f)$ durch den am enferntsten Punkt von **L** zu **L** parallel ist. Beweisen Sie diese Aussage[3].

56. Man berechne: (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$; (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$.

57. Man berechne: (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)}$; (ii) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

58. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{\log x}{x}$ gegeben. Man finde $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und man bestimme das Montonieverhalten von f. Welche Zahl ist größer: π^e oder e^π?

59. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Man zeige[4], daß $f(xy) = f(x)+f(y)$ für alle $x, y \in (0,\infty)$, falls $f(1) = 0$ und $f'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$.

60. Der Satz von l'Hospital besagt daß $L = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ falls es $x_0 > 0$ gibt, so daß $f, g : (x_0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ als auch $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ erfüllen, unter der Voraussetzung, daß $g'(x) \neq 0$ für alle $x > x_0$. Überzeugen Sie sich anhand des Beispiels $f(x) = x + \sin(x)\cos(x)$, $g(x) = f(x)e^{\sin(x)}$ daß die letzte Voraussetzung wesentlich sein kann.

61. Man berechne $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

[3] *Hinweis*: Für A, B, $C \in \mathbb{R}$ mit $A^2 + B^2 > 0$ ist die Distanz von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ zu der Geraden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ Ay + Bx + C = 0\}$ durch die Formel $\frac{|Ay_0+Bx_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ gegeben. Zeigen Sie, daß $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ (b-a)y - [f(b) - f(a)]x + af(b) - bf(a) = 0\}$.

[4] *Hinweis*: Für $x > 0$ fix, definiere $g(y) = f(xy)$ und berechne $g'(y)$.

62. Die Kettenregel besagt, daß falls die Funktion $f : (0,1) \to (0,1)$ in $x_0 \in (0,1)$ differenzierbar ist, und die Funktion $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ in $f(x_0) \in (0,1)$ differenzierbar ist, dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. Erklären Sie, warum der folgende "Beweis" der Kettenregel nicht gültig ist: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} =$
$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

63. Man zeige, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

der Klasse $C^\infty(\mathbb{R})$ ist, mit $D^k f(0) = 0$ für alle $k \geq 0$.

64. Man zeige, daß die Funktion $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ für keine Werte des Parameters $m \in \mathbb{R}$ zwei Wurzeln im Intervall $[0,1]$ haben kann.

65. Man zeige, daß es genau zwei Werte von $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ gibt, für die Funktion $f(x) = x^2 - \cos(x)$. Man beweise zusätzlich, daß diese Werte im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ liegen.

66. Man definiert die Hyperbelfunktionen (hyperbolischer Sinus und Cosinus, bzw.) folgendermaßen:

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Man beweise die Reihenentwicklungen

$$\cosh(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sinh(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

und man zeige, daß beide Funktionen der Klasse $C^\infty(\mathbb{R})$ sind, mit $\cosh'(t) = \sinh(t)$ und $\sinh'(t) = \cosh(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Man zeige, daß $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, und man berechne die Ableitung der inversen Funktion, unter Rücksicht der Identität

$$\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Durch berechnen der Ableitung der Funktion $x \mapsto \log(\sqrt{1+x^2} + x)$ auf $\mathbb{R}$, versuchen Sie, eine explizite Formel für die Inverse zu finden.

(iii) Man zeige, daß $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ bijektiv ist, und man finde die inverse Funktion indem man mit Hilfe einer Substitution die Wurzel eines quadratischen Polynoms in $[1, \infty)$ sucht.

67. Man zeige[5], daß falls die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist, mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f'(0) = f'(1) = 0$, dann gibt es ein $x_0 \in [0,1]$ mit $|f''(x_0)| \geq 4$. Intuitiv: ein Partikel, dessen geradlinige Bewegung die Einheitsentfernung in einem Zeiteinheitsintervall durchläuft, mit Nullgeschwindigkeit am Anfang und am Ende, muß irgendwann eine Beschleunigung haben, die mindestens 4 Einheiten groß ist.

[5] *Hinweis*: Betrachte die Funktion $F(x) = f(x) - x^2(x-1)^2$.