Übungen zu Einführung in die Analysis

(Nach Zusammengestellungen von Günther Hörmann und Karlheinz Gröchenig)

Wintersemester 2013/14

Vor den folgenden Aufgaben werden in den ersten fünf Wochen der Übungen noch jene zur *Einführung in das mathematische Arbeiten* durchgenommen.

I. FOLGEN, REIHEN UND TEILMENGEN REELLER ZAHLEN

Zu §1: $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und die Archimedische Eigenschaft

$\boxed{1}$ Zeigen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! n \in \mathbb{Z}: \ n \leq x < n+1.$$

Wir setzen dann $\lfloor x \rfloor := n$ (oft auch als $[x]$ notiert, die sog. Gaußklammer) und nennen $\lfloor x \rfloor$ das *größte Ganze von x*. Damit definieren wir eine Funktion floor : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Skizzieren Sie ihren Graphen.

$\boxed{2}$ **Definition:** Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heiße *unendlich groß*, wenn gilt: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x > n$. Gibt es unendlich große reelle Zahlen?

$\boxed{3}$ (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq n_1: \quad (n-k) > (\frac{n}{2}).$$

Insbesondere ist dann auch $(n-k)^{k+1} > (n/2)^{k+1}$.

(b) Sei $x > 0$. Zeigen Sie: es existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq n_2: \quad (1+x)^n > n^k.$$

(Hinweis: Binomischer Lehrsatz, (a) und archimedische Eigenschaft.)

Zu §2: Folgen und Grenzwerte

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sei $b > 1$.

(a) Folgern Sie aus Aufg. 3: zu $m \in \mathbb{N}$ beliebig existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq n_0 : \quad b^n > n^m.$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{b^n} = 0$. (Hinweis: ähnlich wie Beisp.2.4.5) in der V)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Zeigen Sie:

(a) $\lim a_n = a$ ist äquivalent zu $\lim |a_n - a| = 0$.
(b) Ändert man endlich viele Glieder einer konvergenten Folge ab, so ändern sich weder Konvergenzverhalten noch Grenzwert.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Beweisen Sie Ihre Behauptung direkt durch Rückgriff auf die Definition der Konvergenz.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$ $(n \geq 1)$ gegen 1 konvergiert. Finden Sie zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ explizit ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$ stets $|a_n - 1| < \varepsilon$ gilt.
(Hinweis: Bernoulli-Ungleichung.)

$\boxed{\mathbf{8}}$ Entscheiden Sie jeweils welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegen. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{(3-n)^3}{3n^3 - 1}$ (b) $b_n = \dfrac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (a) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(3n^2 + 2n + 1)(2n - 1)}$

(b) $a_n = \dfrac{n^3 + 4}{2n^2 + n + 1}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (a) $a_n = \dfrac{(n+1)^k - n^k}{n^{k-1}}$, wobei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ fest

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{3n^2 + 4n + 5}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} \to 1$ für $n \to \infty$.

(Hinweis: $\sqrt[n]{n} = 1 + b_n \Rightarrow n = (1 + b_n)^n$.)

$\boxed{\mathbf{12}}$ Zeigen Sie jeweils, dass es sich um Nullfolgen handelt:

(a) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (b) $b_n = \dfrac{2^n}{n!}$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

(a) $(a_{n+1} - a_n)$ ist Nullfolge $\Longleftrightarrow$ (a_n) ist konvergent

(b) Sei $0 < q < 1$ und $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < a_{n+1} \leq q \cdot a_n$. Dann ist (a_n) eine Nullfolge.

$\boxed{\textbf{14}}$ Sei $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$. Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$. (Hinweis: was ist $\sum_{k=1}^n k$?)

$\boxed{\textbf{15}}$ Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwerten a und b. Zeigen Sie, daß die Folge $c_n = \max(a_n, b_n)$ konvergiert und daß

$$\lim_{n\to\infty} \max(a_n, b_n) = \max(a, b)\,.$$

$\boxed{\textbf{16}}$ Sei (a_n) eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sei b_n das arithmetische Mittel der ersten n Glieder von a_n,

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_2 \cdots + a_n}{n}\,.$$

Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

$\boxed{\textbf{17}}$ (a) Zeigen Sie: Ist (a_n) konvergent mit $a := \lim a_n > 0$ und (b_n) bestimmt divergent gegen $+\infty$, dann ist $(a_n \cdot b_n)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

(b) Gilt die Aussage aus (a) auch im Fall $a = 0$?

$\boxed{\textbf{18}}$ Geben Sie jeweils ein Beispiel für Folgen (a_n) und (b_n) an, für die $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$ ist und

(a) $\lim a_n = +\infty$ (b) $\lim a_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) (a_n) divergent, aber nicht bestimmt divergent.

$\boxed{\textbf{19}}$ Beweisen Sie: Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, dann gilt $\lim \dfrac{1}{a_n} = +\infty$.

Zu §3: Vollständigkeit und Konvergenzprinzipien

$\boxed{\textbf{20}}$ Bestimmen Sie jeweils alle Häufungswerte der Folge (a_n), insbesondere den Limes superior und Limes inferior. Vergleichen Sie stets mit dem Infimum und Supremum der Menge $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

(a) $a_n = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$

(b) $a_{3n-2} = 3 + \dfrac{1}{n}$, $a_{3n-1} = \dfrac{2}{n}$, $a_{3n} = -\dfrac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$

(c) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$

$\boxed{\textbf{21}}$ Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge. Zeigen Sie, daß (a_n) genau dann konvergiert, wenn (a_n) beschränkt ist und genau einen Häufungswert besitzt.

$\boxed{\textbf{22}}$ Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und für $n = 2, 3, \ldots$ sei a_n durch die Rekursion

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist, indem Sie zum Beispiel zunächst induktiv die Formel $a_{n+1} - a_n = (-1)^n/2^n$ $(n \in \mathbb{N})$ nachweisen. Letzteres erlaubt auch die explizite Bestimmung des Grenzwertes. Was ist sein Wert?

$\boxed{\textbf{23}}$ Es sei (a_n) eine Folge mit der Eigenschaft, dass für ein (festes) $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ gilt:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}| \qquad (n \geq 1).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Konvergenzprinzipes von Cauchy, dass (a_n) konvergent ist.

Zusatzfrage: Lässt sich die Konvergenz auch beweisen, wenn $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ gilt?

$\boxed{\textbf{24}}$ Übertragen Sie die Überlegungen aus der VO auf den folgenden Fall: sei $a > 0$, $x_0 > 0$

(a) zeigen Sie, dass durch die Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

eine reelle Folge (x_n) definiert wird, für die $x_n^2 \geq a$ $(n \geq 1)$ gilt. Insbesondere ist (x_n) nach unten beschränkt.

(b) zeigen Sie, dass (x_n) ab $n \geq 1$ monoton fallend ist;

(c) schließen Sie, dass (x_n) gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

$\boxed{\textbf{25}}$ Zeigen Sie: eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge (a_n) konvergiert gegen das Supremum der Menge $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$.

$\boxed{\textbf{26}}$ Sei $a_1 = 1, a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{1+a_1}, a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$. Zeigen Sie, daß die Folge a_n nach oben beschränkt ist. Geben Sie explizit eine obere Schranke an. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$.

$\boxed{\textbf{27}}$ Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Wenn die Ungleichung $a_n \leq c$ für unendlich viele n gilt, dann besitzt die Folge einen Häufungswert $\leq c$. Wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß die Ungleichung $a_n \leq c$ für alle $n \geq N$ gilt, dann ist der größte Häufungswert $\leq c$.

$\boxed{\textbf{28}}$ Bestimmen Sie jeweils alle Berührpunkte und Häufungspunkte der angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ (b) $B := \Big([1, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2[\Big) \cap \mathbb{Q}$

(c) C eine beliebige endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$

$\boxed{\textbf{29}}$ Man ermittle für die Mengen $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ alle inneren Punkte, die Randpunkte und die Häufungspunkte. Falls vorhanden, bestimmen Sie auch Infimum und Supremum dieser Mengen.

$$A =]0,1[\cup]1,2[, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x = 0\}, \quad C = \{1, 1.1, 1.11, 1.111, \ldots\}$$

Zu §4: Konvergenzkriterien für Reihen

$\boxed{\textbf{30}}$ Untersuchen Sie jeweils, ob $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert für

(a) $c_n = \dfrac{(-1)^n\, n}{(n+1)(n+2)}$ (b) $c_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

(c) Wie sieht es mit absoluter Konvergenz aus?

Aufgaben 31-32: Welche der folgenden Reihen sind absolut konvergent?

$\boxed{\textbf{31}}$ (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

$\boxed{\textbf{32}}$ (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{n^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

$\boxed{\textbf{33}}$ Zeigen Sie folgenden Spezialfall des Wurzelkriteriums und des Quotientenkriteriums:

Falls $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \theta$ existiert und $\theta < 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \theta$ existiert und $\theta < 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

$\boxed{\textbf{34}}$ Sei $a_{2n} = 1/n$ und $a_{2n-1} = 1/\sqrt{n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Untersuchen Sie die Konvergenz und absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{6} + \ldots$$

$\boxed{\textbf{35}}$ Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3 x^n}{2^n}$?

$\boxed{\textbf{36}}$ Angenommen, Sie wissen bereits, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Zeigen Sie, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

Welche Sätze verwenden Sie?

II. STETIGE FUNKTIONEN EINER VARIABLE

Zu §5: Stetigkeit

$\boxed{\textbf{37}}$ Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenem von f aus? Veranschaulichen Sie Ihre Aussagen in Skizzen.

(a) $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(2x)$ (allgemeiner: $x \mapsto f(\lambda x)$ mit $\lambda > 0$)

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x-1)$ (allgemeiner: $x \mapsto f(x-a)$ mit $a \in \mathbb{R}$)

38 An welchen Stellen sind die gegebenen Funktionen stetig?

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1}{x}$

(b) $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(x) := \dfrac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $\operatorname{sgn}(0) := 0$ (Signum-Funktion).

39 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{für } x \leq 1 \\ 8x - 3 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

40 Die Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cosinus Hyperbolicus) und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Sinus Hyperbolicus) sind definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

Wiederholen Sie, warum die Funktionen cosh und sinh stetig auf $\mathbb{R}$ sind. Zeigen Sie die Formel

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(daher also 'Hyperbelfunktionen')}$$

und eines der beiden (sogenannten) Additionstheoreme (für $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig)

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y). \end{aligned}$$

41 Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren und, wenn ja, berechnen Sie diese:

(a) $\displaystyle\lim_{x \searrow 1} \frac{1+x}{1-x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 1}{1 - x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \exp\left(\frac{x^2 - 131x - 97}{(x+17)(x+1)}\right)$.

42 Es sei $\xi \in]a, b[$, $f :]a, b[\setminus \{\xi\} \to \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \searrow \xi} f(x) = \gamma = \lim_{x \nearrow \xi} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to \xi} f(x) = \gamma$$

(insbesondere existiert der Limes).

43 Gegeben sei die stetige Funktion $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$. Begründen Sie, warum f nicht *als stetige Funktion auf ganz* $[-1, 1]$ *fortgesetzt* werden kann, d.h. es gibt keine stetige Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{44}}$ Sei g auf $[0,1]$ definiert und beschränkt. Zeigen Sie mithilfe der Definition von Stetigkeit, daß die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = xg(x)$ stetig in 0 ist.

$\boxed{\mathbf{45}}$ Zeigen Sie direkt mittels Rückgriff auf die Definition, dass die Funktion $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x^2$, stetig ist.
Ist die Funktion f gleichmäßig stetig auf $]0,\infty[$?
Ist die Einschränkung von f auf $[1,\infty[$ gleichmäßig stetig?

$\boxed{\mathbf{46}}$ Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetigen Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

$\boxed{\mathbf{47}}$ Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$.

(a) Hat f eine Nullstelle in $]0,1[$?

(b) Gibt es eine stetige Umkehrfunktion zu f?

$\boxed{\mathbf{48}}$ Beweisen Sie den folgenden "Fixpunktsatz": Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion auf $[0,1]$. Dann gibt es ein $a \in [0,1]$, sodaß $f(a) = a$.

Geben Sie eine graphische Interpretation dieses Satzes. Gilt der Satz noch, wenn f nicht überall stetig ist?

$\boxed{\mathbf{49}}$ Es sei $D := [-2,-1[\cup [1,2]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{für } -2 \le x < -1 \\ x-1 & \text{für } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f als Abbildung $D \to [-1,1]$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $g : [-1,1] \to D$ explizit (Skizze!) und begründen Sie, warum g im Punkt 0 nicht stetig ist.

Zu §6: Elementar-transzendente Funktionen

$\boxed{\mathbf{50}}$ Es sei $a > 1$ und $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gegeben durch $x \mapsto a^x$ (wobei $\mathbb{R}^+ :=]0, \infty[$). Zeigen Sie:

(a) f_a ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv

(b) die Umkehrfunktion ${}^a\log := f_a^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend

(c) $\forall x \in \mathbb{R}^+$: ${}^a\log(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$.

$\boxed{\mathbf{51}}$ Zeigen Sie: $\log(1 + x) = x + o(|x|)$ $(x \to 0)$.

$\boxed{\mathbf{52}}$ Stellen Sie fest, wo die folgenden Funktionen definiert und stetig sind:

$$\frac{\sqrt{e^x}}{x}, \qquad \log(x^2 - 2x + 1), \qquad \frac{e^{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2+1}}}{\log(\sqrt{x})}$$

$\boxed{\mathbf{53}}$ Sind die folgenden Reihen konvergent in $\mathbb{C}$?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{n})$ (b) $z \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (Hinweis: Fallunterscheidung für $|z|$)

$\boxed{\mathbf{54}}$ Man beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß für komplexe Folgen: Sei $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen (das heißt, daß es ein $M \geq 0$, sodaß $|z_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{\mathbf{55}}$ Es sei $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Zeigen Sie:

(i) für $\alpha \neq 0$ gilt $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

(ii) die Abbildung $\alpha \mapsto t := \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \tan\dfrac{\alpha}{2}$ ist bijektiv $]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$

(iii) es gelten die Formeln $\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

Bemerkung: somit erhalten wir $\{(\cos\alpha, \sin\alpha) : -\pi < \alpha < \pi\} = \{\frac{(1-t^2, 2t)}{1+t^2} : t \in \mathbb{R}\}$, was einer Parametrisierung des Einheitskreises (im $\mathbb{R}^2$) durch rationale Funktionen entspricht; Sie werden diese Formeln vor allem in der klassischen Trickkiste für Techniken der Integration finden.

$\boxed{\mathbf{56}}$ Beweisen Sie aus den Additionstheoremen mit Hilfe der Definition von π, dass $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion ist, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

$\boxed{\mathbf{57}}$ Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass f stetig (auf $\mathbb{R}$) ist.
Können Sie - kann irgend jemand - den Graphen der Funktion f „ganz durchzeichnen“?

III. DIFFERENTIATION

Zu §7: Differenzierbarkeit und Ableitung

Untersuchen Sie folgende Funktionen jeweils hinsichtlich Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung:

58 (a) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allerdings direkt durch Rückgriff auf die Definition der Differenzierbarkeit reeller Funktionen

(b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot \log(x) - x$

(c) $h :]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x} \cdot \arcsin(\sqrt{x})$

59 (a) $r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$

(b) $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$

(c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{1/3}$ (also die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^3$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

60 Untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitung:

$$\frac{1}{\log(x)}, \quad x^x, \quad \log\sqrt{1+\cos^2(x)}$$

61 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

62 Sei f differenzierbar, berechnen Sie die Ableitung der Funktionen $g(x) = \sqrt{f(x)}$ und $\log(f(x))$.

63 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit folgenden Eigenschaften: f ist differenzierbar in a und $f(a) = 0$, g ist stetig in a. Dann ist die Funktion $fg : I \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar und $(fg)'(a) = f'(a)g(a)$.

64 Seien f und g differenzierbaren Funktionen. Beweisen Sie durch Induktion die Leibnizsche Formel für die n-te Ableitung des Produkts:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Zu §8: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

65 Zeigen Sie, dass die Funktion f aus Aufgabe 39 differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema und untersuchen Sie die Monotonieeigenschaften. Gibt es ein globales

Minimum bzw. Maximum? Ist f zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

$\boxed{\mathbf{66}}$ Sei $a \geq 0$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $p(x) = x^4 - 4ax^3$. Untersuchen Sie p bezüglich Monotonie und Extrema in Abhängigkeit vom Parameter a.

$\boxed{\mathbf{67}}$ Untersuchen Sie die Funktion $f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$ hinsichtlich Extrema und geben Sie maximale Intervalle an, in denen f konvex bzw. konkav ist.

$\boxed{\mathbf{68}}$ Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

$\boxed{\mathbf{69}}$ Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{\log(x+1)}\right), \quad \lim_{x\to 1} \frac{\log x - x + 1}{(x-1)^2}, \quad \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)$$

$\boxed{\mathbf{70}}$ Man beweise die beiden Identitäten:

$$\begin{aligned} 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} &= \pi \qquad \text{für } x > 1 \\ 2\arctan x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} &= 0 \qquad \text{für } |x| < 1\,. \end{aligned}$$

Hinweis: man differenziere die Gleichungen.

IV. Zusatzübungen

Wer Zeit, Energie und Lernwillen hat, der sollte soviele Probleme wie möglich lösen. Im folgenden eine kleine Auswahl. Mehr Aufgaben finden sich in den angegebenen Lehrbüchern.

71 Man beweise: für alle $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt

$$(1+x)^n \geq \tfrac{n^2}{4} x^2 \,.$$

(Hinweis: binomischer Lehrsatz)

72 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$a_0 = a, a_1 = b, \quad a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

definiert. Zeigen Sie, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

73 Sei (f_n) die Fibonacci-Folge, $f_0 = 1, f_1 = 1,\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie, daß

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

für alle $n \geq 1$, und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1} f_{n-1}}{f_n^2} = 1 \,.$$

(Mehr dazu in der Vorlesung "Zahlentheorie")

74 Man zeige, daß jede Folge reeller Zahlen eine monotone (wachsend oder fallende) Teilfolge enthält.

75 Betrachte die drei Folgen

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1000} - \sqrt{n} \\ b_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \\ c_n &= \sqrt{n+\tfrac{n}{1000}} - \sqrt{n} \end{aligned}$$

Man zeige, daß für alle $n < 10^6$ gilt, daß $c_n < b_n < a_n$, daß aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}, \lim_{n\to\infty} c_n = \infty \,.$$

76 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und definiere die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $A_0 = a_0/2$ und für $k \geq 1$

$$A_k = \tfrac{1}{2} a_{2k-2} + a_{2k-1} + \tfrac{1}{2} a_{2k} \,.$$

Dann gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ konvergiert. Im Fall der Konvergenz haben beide Reihen denselben Grenzwert.

$\boxed{\textbf{77}}$ (a)* Man beweise mithilfe der Axiome für die reellen Zahlen folgende Aussage (das *Dedekindsche Schnittaxiom*): Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, sodaß $A \cup B = \mathbb{R}$ und $x < y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$. Dann gibt es ein $s \in \mathbb{R}$, sodaß

$$x \leq s \leq y \qquad \text{für alle} x \in A, y \in B$$

gilt.

(b)* Man zeige: Sei K ein geordneter Körper, in dem das Dedekindsche Schnittaxiom gilt. Dann gilt in K auch das Archimedische Axiom und das Vollständigkeits-Axiom.

(Was läßt sich dann über K folgern?)

$\boxed{\textbf{78}}$ Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, wenn für alle $x, y \in D$ gilt, daß

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\,.$$

(a) Man zeige, daß jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

(b) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz stetig.

$\boxed{\textbf{79}}$ Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x^2)$, nicht gleichmäßig stetig ist. An welcher Eigenschaft des Graphen von f ist dies erkennbar?

(Hinweis: Betrachten Sie $f(\sqrt{k\pi})$ für $k \in \mathbb{Z}$)

$\boxed{\textbf{80}}$ Man beweise: Eine auf einem beschränkten offenen Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ stetige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn sie sich zu einer stetigen und beschränkten Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ fortsetzen läßt.

$\boxed{\textbf{81}}$ Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Man zeige, daß es eine Konstante $M > 0$ gibt, sodaß

$$|f(x)| \leq M(1 + |x|) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+$$

gilt.

$\boxed{\textbf{82}}$ Sei $a > 0$, $x_0 = a$ und zwei Folgen rekursiv durch

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}, \quad y_n = 2^n(x_n - 1)$$

definiert. Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

(Hinweis: man verwende $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.)

$\boxed{\textbf{83}}$ Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(\log x)^n}{x^{1+\alpha}} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{\sqrt{x}}} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\alpha x}} = 0$$

(Formulieren Sie diese Grenzwerte mit der $o(\cdot)$ Notation.)

$\boxed{\textbf{84}}$ Man untersuche die Konvergenz der folgenden Reihen:

$$\sum_{n=1} \frac{i^n}{n}, \qquad \sum_{n=1} \Big(\frac{1-i}{1+i}\Big)^n, \qquad \sum_{n=1} \frac{1}{\log(n)}\Big(\frac{1-i}{1+i}\Big)^n, \qquad \sum_{n=1} N^2\Big(\frac{1-i}{2+i}\Big)^n,$$

$\boxed{\textbf{85}}$ Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen $f_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, wobei $a > 0$ eine Konstante ist:

$$f_0(x) = x^x, \quad f_1(x)x^{(x^x)}, \quad f_2(x) = (x^x)^x$$
$$f_3(x) = x^{(x^a)}, \quad f_4(x) = x^{(a^x)}, \quad f_5(x) = a^{(x^x)}$$

$\boxed{\textbf{86}}$ Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -|x|^\alpha & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

Für welche α ist F_α im Nullpunkt stetig, für welche α ist F_α differenzierbar in Null?

$\boxed{\textbf{87}}$ Man untersuche die Funktion $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ auf lokale Extrema in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{88}}$ Man zeige, daß die Limiten

$$\lim_{x\to\pi/2} \Big(\tan x + \frac{1}{x - \pi/2}\Big), \qquad \lim_{x\to\pi/2} (x - \tfrac{\pi}{2}) \tan x$$

existieren und berechne ihren Wert.

$\boxed{\textbf{89}}$ Berechnen Sie die Umkehrfunktionen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ und deren Ableitung. (Lösung $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$)

$\boxed{\textbf{90}}$ Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: a ist Häufungspunkt von A genau dann, wenn a Berührpunkt von $A \setminus \{a\}$ ist.