1. Beweisen Sie folgende Aussage:

   Die Summe zweier geraden Zahlen ist gerade.

2. Zerlegen Sie folgende Zahlen in Primfaktoren:

   $$400, \quad 2049, \quad 279936, \quad 362880.$$

3. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung der Summen- oder Produktzeichen an:

   $$1.) \ \sum_{k=2}^{12} k^{2k+1} \quad 2.) \ \prod_{j=1}^{9} i^3 \quad 3.) \ \sum_{k=-4}^{-6} b_k$$

4. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen an:

   1.) $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187$

   2.) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$

   3.) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$

5. Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollte eine Gleichung falsch sein, so stellen Sie die rechte Seite richtig:

   1.) $\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{j=3}^{7} a_{j-2}$ 2.) $\log \prod_{i=0}^{n} 3^{a_i} = \log 3 \sum_{j=0}^{n} a_j$ 3.) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a^j b^{k-j}$

6. Beweisen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe, d.h. für beliebiges reelles q und $n \in \mathbb{N}$ zeigen Sie, dass

   $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

   gilt.

7. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

   (i)
   $$\sum_{k=0}^{n} q^{-k} = \frac{q^{n+1} - 1}{q^n(q-1)}, \ q \neq 1,$$

   (ii)
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}.$$

8. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle angegebenen $n \in \mathbb{N}$:

   (i)
   $$\sum_{k=0}^{n} (3k - 2) = \frac{(1+n)(3n-4)}{2}, \ n \neq 0,$$

   (ii)
   $$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$$

   für $x \neq 1$ und $n \geq 0$.

9. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

   [Hinweis: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz]

10. Berechnen Sie
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$
[Hinweis: Vergessen Sie nicht, den Fall $n = 0$ gesondert zu betrachten!]

11. Seien p, q beliebige Aussagen. Sind dann die folgenden Aussagen wahr?
    (a) $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow \neg p$,
    (b) $(\neg q \vee p) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$.

12. Bilden Sie den Umkehrschluss der folgenden Aussagen:
    (a) $\forall n \in \mathbb{N}: \ n^2 > n \Rightarrow n > 1$,
    (b) $\forall n \in \mathbb{N}: \ n^3$ ungerade $\Rightarrow n$ ungerade.

13. Verneinen Sie folgende Aussage:

    Wenn zwei Ebenen einen gemeinsamen Punkt haben, dann sind sie nicht parallel.

14. Begründen Sie, warum folgende Aussagen wahr oder falsch sind:
    (a) $\forall x \in \mathbb{N}: \ \exists y \in \mathbb{N}: \ x = y$,
    (b) $\exists x \in \mathbb{N}: \ \forall y \in \mathbb{N}: \ x = y$,
    (c) $\forall x \in \mathbb{N}: \ \exists y \in \mathbb{N}: \ x \geq y$,
    (d) $\exists x \in \mathbb{N}: \ \forall y \in \mathbb{N}: \ y \geq x$.

15. Begründen Sie, warum folgende Aussagen wahr oder falsch sind:
    (a) $(\exists x: \ P(x) \wedge Q(x)) = ((\exists x: \ P(x)) \wedge (\exists x: \ Q(x)))$,
    (b) $(\forall x: \ P(x) \vee Q(x)) = ((\forall x: \ P(x)) \vee (\forall x: \ Q(x)))$.

16. Bestimmen Sie die folgenden Mengendurchschnitte:
    (a) $\{1, 2, 4, 6\} \cap \{4, 1, 5, 9, 12\}$,
    (b) $\{5z | \ z \in \mathbb{N}\} \cap \{p \in \mathbb{N} | \ p \text{ ist Primzahl}\}$.
    (c) $\{6z | \ z \in \mathbb{N}\} \cap \{p \in \mathbb{N} | \ p \text{ ist Primzahl}\}$.
    (d) $\bigcap_{n \geq 1} A_n$, wobei $A_n := \{0, 1, \ldots, n\}$.

17. Bestimmen Sie die Mengen $A \times B$, A^2, B^3 für die folgenden Mengen:
    (a) $A = \{1\}$, $B = \{a, b\}$,
    (b) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 1\}$,
    (c) $A = \emptyset$, $B = \{a, b, c\}$.

18. Berechnen Sie $\prod_{i=1}^{4} M_i$ mit $M_i := \{i, i + 1\}$.

19. Betrachten Sie auf der Menge der ganzen Zahlen die Äquivalenzrelation
$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \text{ ist gerade.}$$
    (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
    (b) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen.
    (c) Beschreiben Sie die Quotientenmenge $\mathbb{Z}/\sim$.
    (d) Ersetzen Sie "ist gerade" durch "ist ungerade". Bleibt $\sim$ dann eine Äquivalenzrelation?

20. Seien $(A, \leq)$ and $(B, \preceq)$ geordnete Mengen. Auf $A \times B$ definieren wir die Relation $\trianglelefteq$ durch
$$(a, b) \trianglelefteq (a', b') :\Leftrightarrow a < a' \vee (a = a' \wedge b \preceq b'),$$
die *lexikographische Ordnung*. Zeigen Sie, dass $\trianglelefteq$ eine Ordnungsrelation auf $A \times B$ definiert.

21. Sei $f : A \to B$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subseteq A$. Zeigen Sie
    (a) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$,
    (b) $f(A_2 \setminus A_1) \supseteq f(A_2) \setminus f(A_1)$.

    Gilt Gleichheit? Geben Sie ein Gegenbeispiel an.

22. Sei $f : A \to B$ eine injektive Funktion und $A_1, A_2 \subseteq A$. Zeigen Sie
    (a) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$,
    (b) $f(A_2 \setminus A_1) = f(A_2) \setminus f(A_1)$.

23. Die Funktion $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ sei definiert durch den Graphen $\{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\}$. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

24. Welche der folgenden Mengen sind abzählbar: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^5, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$?

25. Stellen Sie die Verknüpfungstabellen der Addition und Multiplikation in den Restklassenmengen $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6$ auf.

26. Beweisen Sie, dass $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ eine Halbgruppe ist.

27. Beweisen Sie, dass $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ und $(M_2(\mathbb{R}), +)$ Monoide sind.

28. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ eine Gruppe ist.

29. Stellen Sie die Cayleytafeln von $(\mathbb{Z}_6, +)$ und von $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ auf. Welche Strukturen (Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe) liegen jeweils vor?

30. Überprüfen Sie ob die Menge $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}_6, +)$ bildet.

31. Sei $(H, \circ)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$ und sei $(K, \circ)$ eine Untergruppe von $(H, \circ)$. Zeigen Sie, dass $(K, \circ)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$ ist.

32. Zeigen Sie, dass die Menge aller bijektiven Abbildungen einer Menge M auf sich selbst bezüglich der Verknüpfung von Funktionen eine Gruppe bildet. Ist die Menge M endlich mit n Elementen, so nennen wie die entstehende Gruppe die *Permutationsgruppe mit n Elementen* und beschreiben sie mit $\mathfrak{S}_n$. Bestimmen Sie die Verknüpfungstafeln von $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_4$.

33. Bestimmen Sie zwei Gruppenhomomorphismen zwischen $(\mathbb{Z}_3, +)$ und $(\mathbb{Z}_6, +)$.

34. Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \Box)$ Gruppen und sei $(H, \Box)$ abelsch. Sei

    $$\mathrm{HOM}(G, H) := \{\varphi : G \to H : \ \varphi \text{ ist Gruppenhomomorphismus von } (G, \cdot) \text{ nach } (H, \Box)\}$$

    die Menge aller Gruppenhomomorphismen von G nach H mit der Verknüpfung

    $$\varphi \circ \varphi' : G \ni g \mapsto \varphi(g) \Box \varphi'(g) \in H.$$

    Zeigen Sie, dass $(\mathrm{HOM}(G, H), \circ)$ eine Gruppe ist.

35. Zeigen Sie, dass die Menge aller komplexen Zahlen c mit $|c| = 1$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

36. Sei ε ein Symbol und definiere

    $$\mathbb{R}[\varepsilon] := \{a + b\varepsilon : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

    mit den Verknüpfungen

    $$(a_1 + b_1\varepsilon) \oplus (a_2 + b_2\varepsilon) := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\varepsilon,$$
    $$(a_1 + b_1\varepsilon) \otimes (a_2 + b_2\varepsilon) := (a_1a_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)\varepsilon.$$

    Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}[\varepsilon], \oplus, \otimes)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

37. Betrachten Sie die Menge $M_2(\mathbb{Z})$ aller 2×2 Matrizen mit ganzzahligen Einträgen:

$$M_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : \ \forall i,j \in \{1,2\} : \ a_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

mit den Operationen $+$ und $\cdot$. Ist $M_2(\mathbb{Z})$ ein Unterring von $M_2(\mathbb{R})$?

38. Bestimmen Sie die Einheitengruppe der Ringe $\mathbb{Z}_n$ für $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

39. Enthält der Ring $\mathbb{R}[\varepsilon]$ aus Aufgabe 36 Nullteiler?

40. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni a \mapsto a + 0 \cdot \varepsilon \in \mathbb{R}[\varepsilon]$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

41. Sei $\mathcal{L} := \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ ist lineare Abbildung}\}$ die Menge aller linearen Abbildungen von der Ebene in sich selbst. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{L}, +, \circ)$ mit $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $f \circ g(x) = f(g(x))$ einen Ring bildet. Zeigen Sie, dass der Ring $(\mathcal{L}, +, \circ)$ isomorph zu dem Ring $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ist.

42. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $(-1, 4)$ und $(9, 5)$.

43. Finden Sie alle Normalvektoren zum Vektor $(1, 2)$.

44. Zeigen Sie, dass für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abbildungen $f : (x_1, x_2) \mapsto (\lambda x_1, \lambda x_2)$ und $g : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$ linear sind. Finden Sie die zugehörigen Matrixdarstellungen.

45. Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Betrachten Sie die Matrix

$$S_v := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\|v\|^2} \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_1 v_2 & v_2^2 \end{bmatrix}.$$

Welche geometrische Wirkung hat die lineare Abbildung die von S_v definiert wird? Untersuchen Sie dazu die folgenden Spezialfälle für v: $e_1, e_2, (1, 1), (-1, 1)$. Gewinnen Sie daraus eine Vermutung, und beweisen Sie dann Ihre Vermutung.

46. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $g : \{(0, 1, 1) + t(1, 1, 2) : \ t \in \mathbb{R}\}$ mit der Ebene $\epsilon_{A:B:C}$ mit $A = (0, 2, -1)$, $B = (2, 0, -1)$ und $C = (-1, 1, 0)$.

47. Überprüfen Sie ob die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

    (a) $(1, -1, 2), (3, 1, 1), (0, -5, 4)$,

    (b) $(4, 1, 1), (1, 3, 3), (-1, 3, 1)$.

48. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $(1, 0, -2, 3, 5)$ und $(4, 2, 1, -3, 0)$.

49. Bestimmen Sie den Einheitsvekotor in Richtung von $(3, 1, 3)$.

50. Bestimmen Sie die Hesse'sche Normalform der Ebene durch die Punkte $(1, -2, 3), (2, 4, -1), (1, 3, 0)$.