1. Beweisen Sie folgende Aussage:

   Das Produkt zweier ungeraden Zahlen ist ungerade.

2. Beweisen Sie folgende Aussage:

   Es gibt keine ganzen Zahlen n, m mit $28m + 42n = 100$.

   [Hinweis: Beweisen Sie indirekt. Nehmen Sie an, es gäbe solche m und n. Dann finden Sie einen Teiler der linken Seite, der die rechte Seite nicht teilt.]

3. Die Matrix A sei für $i = 1, \dots, 5$ und $j = 1, \dots, 8$ gegeben durch $A_{ij} = i^2$. Schreiben Sie die Matrix A an.

4. Es sei die Zahlenfolge θ für $i = 1, \dots, 10$ durch $\theta_{2i-1} = 1$ und $\theta_{2i} = 0$ gegeben. Schreiben Sie die Folge an und beschreiben Sie in Worten, welche Gestalt θ hat.

5. Finden Sie Formeln für die Eintragungen A_{ij} und B_{ij} der beiden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

6. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k^3 + k\right) = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}$$

   für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

7. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{für } x \geq -1 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

8. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$? Beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion.

9. Beweisen Sie, dass $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

10. Wir bezeichnen mit a, b und c beliebige binäre Variable. Sind die folgenden Gleichungen richtig?

    (i) $\neg(a \wedge (\neg a)) = 1$,

    (ii) $(\neg a \wedge (b \vee a)) \wedge c = (b \wedge c) \vee a$,

    (iii) $\neg(a \wedge ((\neg b \wedge \neg a \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c))) = 1$.

11. Finden Sie die disjunktive Normalform der Boole'schen Funktion $f(a, b, c)$ welche durch folgende Wahrheitstafel definiert ist:

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

12. Beweisen Sie die Gesetze von DeMorgan mittels Wahrheitstafeln.

13. Beweisen Sie, dass

$$(p \Rightarrow q) \neq (\neg p \Rightarrow \neg q).$$

14. Nehmen wir an, dass $p \Rightarrow q$ gilt. Was lässt sich dann über die folgenden Aussagen sagen?

$$1.\ \neg q \Rightarrow \neg p, \quad 2.\ \neg p \Rightarrow \neg q, \quad 3.\ q \Rightarrow \neg p, \quad 4.\ \neg p \Rightarrow q.$$

15. Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien, welche Kontradiktionen und welche weder das eine noch das andere?
    (a) $(\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
    (b) $((r \Rightarrow p) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg r$,
    (c) $(q \vee (q \Rightarrow p)) \Rightarrow p$.
16. Man verneine die Aussage

    Jede Primzahl ist weder durch 2 oder durch 3 teilbar.
17. Seien G_1, G_2 Geraden. Was bedeutet die Aussage
    $$(\exists x: \ x \in G_1 \wedge x \in G_2) \Rightarrow \neg (G_1 \text{ parallel zu } G_2) \quad ?$$
    Wie lautet der äquivalente Umkehrschluss als logische Formel und in Worten?
18. Bestimmen Sie folgende Mengenvereinigungen:
    (a) $\{1, 5, 6\} \cup \{1, 8, 9, 11\}$,
    (b) $\left\{\frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{N}\right\} \cup \mathbb{N}$,
    (c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{0 \neq m \in \mathbb{N}} \left\{\frac{n}{m}\right\}$.
19. Bestimmen Sie die Menge $A \triangle B$ für die folgenden Mengen:
    (a) $A = \{1, 2, 5, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$,
    (b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$,
    (c) $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
20. Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen auf Transitivität und Reflexivität:
    (a) ist Onkel von,
    (b) lebt im selben Haus wie,
    (c) ist grösser als,
    (d) ist nicht kleiner als.
21. Zeichen Sie den Graphen der Funktion
    $$f: \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}, \quad f(k) = k^3 + 1.$$
22. Zeichen Sie den Graphen der Funktion
    $$f: [-3, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3.$$
23. Bestimme Bild $f_i(A_i)$ und Urbild $f_i^{-1}(B_i)$, $i = 1, 2, 3$ für
    (a) $f_1(x) = x + 3$, $A_1 = \{1, 2, 5\}$, $B_1 = (-1, 3)$,
    (b) $f_2(x) = x^2 - 1$, $A_2 = (-1, 1)$, $B_2 = \{-1, 0\}$,
    (c) $f_3(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ eine Konstante), $A_3 = \{0\} \cup (1, 2)$, $B_3 = \{a\}$.
24. Sei $f: A \to B$ eine Funktion und seien $B_1, B_2 \subseteq B$. Zeigen Sie
    (a) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
    (b) $f^{-1}(B_2 \setminus B_1) = f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1)$.
25. Sind die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
    (a) $f_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$,
    (b) $f_2: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$,
    (c) $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2 + 1$,

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x + 1$,

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$.

26. Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ für die folgenden Funktionen.

    (a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^2$,

    (b) $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x}{3}$, $g(x) = x^2 - 1$,

    (c) $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 3^x$, $g(x) = x^3$.

27. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \to \{0, \dots, 8\}$ mit $f(n, m) := 3(n-1)+m-1$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

28. Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass
$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|},$$
indem Sie eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(M)$ und 2^M konstruieren.

29. Überprüfen Sie ob die angebebene Operation $\circ$ auf der Menge M eine Verknüpfung darstellt:

    (a) $M = \{0, 1\}$, $a \circ b = ab$,

    (b) $M = \{0, 1, 2\}$, $a \circ b = ab$,

    (c) $M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$, $a \circ b = a$,

30. Auf der Menge $\mathbb{R}$ sei die Verknüpfung
$$a \otimes b := ab - 4$$
definiert. Überprüfen Sie die Assoziativität dieser Verknüpfung.

31. Zeigen Sie, dass die drei verschiedenen (komplexen) Lösungen der Gleichung $x^3 = 1$ bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe bilden. Wie verhält sich diese Gruppe zur Gruppe $(\mathbb{Z}_3, +)$?

32. Sei
$$\mathbb{R}[x] := \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : \ n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } i = 0, \dots, n \text{ gilt } a_i \in \mathbb{R}\right\}$$
die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Finden Sie Formeln für die Koeffizienten von $p + q$ und $p \cdot q$ für beliebige $p, q \in \mathbb{R}[x]$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

33. Bestimmen Sie die Einheitengruppe zu dem Ring aus Aufgabe 32.

34. Zeigen Sie, dass der Ring aus Aufgabe 32 ein Integritätsbereich ist.

35. Zeigen Sie, dass der Ring aus Aufgabe 32 mit $|p| = \deg(p)$ ein Euklidischer Ring ist.

    [Hinweis: Wir bezeichnen mit $\deg(p)$ den Grad eines Polynoms, also die Zahl n mit $p(x) = a_0 + a_1x + \dots a_nx^n$ mit $a_n \neq 0$. Zu zeigen ist also, dass die Bewertungsfunktion deg die Bedingungen erfüllt, die in der Definition eines Euklidischen Rings gefordert werden. Um das zu zeigen müssen Sie sich mit der "Division mit Rest" für Polynome befassen.]

36. Bestimmen Sie den ggT von
$$p(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$
$$q(x) = -x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 2$$
in $\mathbb{R}[x]$.

    [Hinweis: Führen Sie den Euklidischen Algorithmus durch und verwenden Sie Aufgabe 35.]

37. Definiere für $\imath$ mit $\imath^2 = -1$ die Menge
$$\mathbb{Q}[\imath] := \{a + b\imath : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$$
mit den Verknüpfungen
$$(a_1 + b_1\imath) + (a_2 + b_2\imath) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\imath,$$
$$(a_1 + b_1\imath) \cdot (a_2 + b_2\imath) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)\imath.$$
Zeigen Sie, dasss $\mathbb{Q}[\imath]$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

38. Betrachte die Menge
$$K := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : \ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$
als Unterring von $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist. Zeigen Sie, dass K isomorph zu $\mathbb{Q}[\imath]$ ist.

39. Zeigen Sie, dass
$$1 + 1 = 2$$
gilt.

40. Sei $(G, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Zeigen Sie, dass genau ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $G = \{kn : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Für welche n ist G isomorph zu $\mathbb{Z}$?

41. Sei K ein geordneter Körper und $1 < a \in K$. Zeigen Sie, dass für $x \geq K$ mit $x > a$ und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt, dass
$$x^n > a.$$
[Hinweis: Verwenden Sie, dass in einem geordneten Körper für $x \geq 0$ und $y \leq z$ gilt, dass $xy \leq xz$, sowie vollständige Induktion nach n.]

42. Definiere für $x \in \mathbb{R}$ den Absolutbetrag $|x| := \begin{cases} x : & x > 0 \\ -x : & x \leq 0 \end{cases}$. Zeigen Sie die Dreiecksungleichung
$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

43. Beweisen Sie, dass
    - $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$,
    - $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

    [Hinweis: Fallunterscheidung ($a \leq b$, $b \leq a$).]

44. Eine nichtleere nach unten beschränkte Menge $S \subseteq \mathbb{Q}$ heißt Dedekindschnitt, falls
$$\forall q \in \mathbb{Q} \setminus S : \ \forall s \in S : \ s \geq q, \tag{1}$$
$$\forall s \in S : \ \exists s' \in S : \ s > s'. \tag{2}$$
Seien S und T Dedekindschnitte und definiere
$$S + T := \{s + t : \ s \in S \wedge t \in T\}.$$
Zeigen Sie, dass $S + T$ ebenfalls ein Dedekindschnitt ist.

45. Für eine komplexe Zahl $z = a + \imath b \in \mathbb{C}$ ($\imath^2 = -1$) sei $\overline{z} := a - \imath b$ die konjungiert komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ folgendes gilt:
$$\overline{\overline{z}} = z,$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

46. Bestimmen Sie für die komplexen Zahlen
$$z_1 = 3 + 2\imath, \quad z_2 = 2 - 4\imath, \quad z_3 = -\imath, \quad z_4 = 1 - \imath, \quad z_5 = 5 - 3\imath$$
$\overline{z_i}$, $|z_i|$, $\arg(z_i)$ und $1/z_i$. Stellen Sie das Resultat jeweils in der Form $a + \imath b$ dar.

47. Bestimmen Sie die Wurzel aus $-3 - 4\imath$. [Hinweis: Sei $a + \imath b$ die Wurzel. Dann gilt $(a + \imath b)^2 = (a^2 - b^2) + \imath(2ab) = -3 - 4\imath$, sowie $a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$ (wieso??). Daraus lässt sich a, b bestimmen.]

48. Stellen Sie den Punkt $(1, 4) \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination der Elemente $(1, 0)$ und $(1, 1)$ dar.
[Hinweis: Wir suchen Koeffizienten $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit $(1, 4) = \mu_1(1, 0) + \mu_2(1, 1)$. Schreiben Sie das als äquivalentes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ für $x = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$, und mit geeigneten $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Es gilt dann $x = A^{-1}b$.]

49. Sei $P = (-1, 4)$ und $Q = (2, 10)$. Sei $g = g_{P:Q}$ die Gerade durch P, Q, $\overline{PQ}$ die Strecke von P nach Q und $s_{P:Q}$ der Strahl von P nach Q.Sei $R = (-4, -2)$, $S = (1, 8)$ und $T = (4, 7)$. Überprüfen Sie für diese Punkte ob sie auf $g_{P:Q}$, $s_{P:Q}$, $\overline{PQ}$ liegen.

50. Wir haben bereits gesehen, dass die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (zB) in $\mathbb{R}^2$ gilt. Zeigen Sie, dass Gleichheit genau dann gilt, falls x, y kollinear und gleich orientiert sind oder einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist.