# Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

## 1. Übungsblatt für die Woche vom 4. bis 8. März 2019

Aufgabe 1.1. (a) Wiederhole die Definition eines geordneten Körpers.
(b) Gib zwei Beispiele geordneter Körper an.
(c) Erkläre, warum Quadrate in geordneten Körpern stets größer oder gleich 0 sind.
(d) Erkläre, warum in jedem geordneten Körper $-1 < 0 < 1$ gilt.
(e) Erkläre, warum auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation existiert, die $\mathbb{C}$ zu einem geordneten Körper macht.

Aufgabe 1.2. Sei $K$ ein Körper und $P \subseteq K$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:
(i) $P$ is abgeschlossen unter Addition, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $x + y \in P$.
(ii) $P$ ist abgeschlossen unter Multiplikation, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $xy \in P$.
(iii) Es gilt $P \cup (-P) = K$ und $P \cap (-P) = \{0\}$, wobei $-P := \{-x : x \in P\}$.

Zeige, dass $K$ mit der Relation

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in P$$

einen geordneten Körper bildet, $x, y \in K$.

Aufgabe 1.3. Unter einer strengen Totalordnung auf einer Menge $X$ verstehen wir eine transitive Relation $<$ auf $X$, die folgende Eigenschaft (Trichotomie) besitzt. Für je zwei Elemente $x, y \in X$ tritt genau einer (und nur einer) der folgenden drei Fälle ein:

$$\text{entweder } x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } y < x.$$

(a) Sei $\leq$ eine Totalordnung auf $X$. Zeige, dass durch

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad x \leq y \wedge x \neq y$$

eine strenge Totalordnung auf $X$ definiert ist.
(b) Sei $<$ eine strenge Totalordnung auf $X$. Zeige, dass durch

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \vee x = y$$

eine Totalordnung $\leq$ auf $X$ definiert ist.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 1.4. Seien $K$ und $L$ zwei Körper. Eine Abbildung $\varphi\colon K \to L$ wird Körperhomomorphismus genannt, wenn für alle $x, y \in K$ folgende drei Gleichungen gelten:

(a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
(b) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
(c) $\varphi(1) \neq 0$

Zeige, dass in diesem Fall für alle $x \in K$ weiters gilt:

(d) $\varphi(0) = 0$
(e) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$
(f) $\varphi(1) = 1$
(g) Ist $x \neq 0$, dann auch $\varphi(x) \neq 0$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

Aufgabe 1.5. Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Körperhomomorphismus. Zeige der Reihe nach:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = n$. Hinweis: Induktion nach $n$
(b) $\forall m \in \mathbb{Z} : \varphi(m) = m$
(c) $\forall q \in \mathbb{Q} : \varphi(q) = q$
(d) $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$. Hinweis: $x \geq 0 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.
(e) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \geq y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$
(f) $\forall x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = x$. Hinweis: Wären $\varphi(x)$ und $x$ verschieden, läge eine rationale Zahl zwischen ihnen.

Die identische Abbildung ist daher der einzige Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.6. Gib einen nicht-trivialen Körperhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, d.h. einen Körperhomomorphismus, der verschieden von der identischen Abbildung ist.