Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

10. Übungsblatt für die Woche vom 20. bis 24. Mai 2019

Aufgabe 10.1. Zeige, dass zwei nicht-degenerierte lineare Gleichungen genau dann dieselbe Gerade in $\mathbb{R}^2$ beschreiben, wenn die eine ein Vielfaches der anderen ist. Seien dazu $a_1, a_2, b, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0,0) \neq (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$. Zeige, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2 = \tilde{b} \right\}$$

genau dann gilt, wenn $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$, $\tilde{a}_2 = \lambda a_2$ und $\tilde{b} = \lambda b$.

Aufgabe 10.2. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien A, B, C Punkte in $\mathcal{E}$ mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass C auf $g := g(A,B)$ liegt und bestimme die Teilverhältnisse $\frac{CA}{AB}$ und $\frac{AC}{CB}$.
(b) Bestimme die Koordinaten eines Punktes D auf g, für den $\frac{DA}{AB} = -2$ gilt.
(c) Bestimme die Koordinaten eines Punktes E auf g, für den $\frac{AE}{EB} = 3$ gilt.
(d) Fertige eine Skizze der Geraden g an, in der die Punkte A, B, C, D, E mit korrekten Teilverhältnissen eingezeichnet sind.

Aufgabe 10.3 (Koordinaten des Streckenmittelpunkts). Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien $A \neq B$ zwei Punkte in $\mathcal{E}$ und bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke AB. Gib eine Formel an, mit der die Koordinaten des Mittelpunkts $x(M)$ aus den Koordinaten der Endpunkte $x(A)$ und $x(B)$ berechnet werden können und beweise diese Formel.

Aufgabe 10.4. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Betrachte Punkte A, B, C, D mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x(D) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden $g := g(A, B)$ und $h := g(C, D)$ auf drei verschiedene Arten:

(a) Beschreibe beide Geraden durch Parameterdarstellungen und löse das Gleichungssystem für die beiden Parameter.
(b) Beschreibe beide Geraden durch Gleichungen und löse das Gleichungssystem für die Komponenten des Schnittpunkts.
(c) Beschreibe eine Gerade durch eine Gleichung, die andere mit einer Parameterdarstellung und löse die lineare Gleichung für den Parameter, die duch Einsetzen entsteht.

Aufgabe 10.5 (Schwerpunkt in Koordinaten). Zeige erneut, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks ABC in einem Punkt S schneiden. Betrachte dazu ein beliebiges affines Koordinatensystem, beschreibe die drei Schwerlinien in Koordinaten durch Parameterdarstellungen, zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden und gib eine Formel für die Koordinaten des Schwerpunkts an. Schließe daraus auch $\frac{AS}{SM_a} = \frac{BS}{SM_b} = \frac{CS}{SM_c} = 2$, wobei M_a, M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten bezeichnen.

Aufgabe 10.6 (Satz von Menelaos mittels Koordinaten). Beweise den Satz von Menelaos mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems. Wähle das Koordinatensystem so, dass die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben, vgl. Beweis des Satzes von Ceva mit Koordinaten.

Aufgabe 10.7 (Strahlensatz). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei parallele Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C'. Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

gilt. Wähle das Koordinatensystem mit Ursprung O so, dass die Gerade g in Koordinaten durch die Gleichung $x_2 = 1$ gegeben ist.

Aufgabe 10.8 (Doppelverhältnis). Seien a, b, c, d vier verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei (nicht notwendigerweise parallele) Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c, d in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C, D und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C', D'. Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'}$$

gilt. Der Quotient von Teilverhältnissen $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ wird als Doppelverhältnis der Punkte A, B, C, D bezeichnet. Wähle das Koordinatensystem so, dass

$$x(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die entsprechende Koordinatenabbildung bezeichnet. Erkläre warum dann

$$x(C) = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(A') = a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B') = b' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(C') = c' \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix},$$

für gewisse $c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Zeige

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{AC}{CB} = \frac{a'}{b'}.$$

Wie folgt daraus die gewünschte Gleichung?