Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

11. Übungsblatt für die Woche vom 27. bis 31. Mai 2019

Aufgabe 11.1. Für beliebige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt:
(a) $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$
(b) $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$
(c) $\langle v+w, v-w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2$
In der Vorlesung wurde (a) gezeigt. Beweise nun (b) und (c). Leite daraus auch folgende beiden Beziehungen her:
(d) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big)$ (Parallelogrammgleichung)
(e) $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\big)$ (Polarisierungsidentität)

Aufgabe 11.2. Sei $x \colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems, g eine Gerade mit Normalvektordarstellung $x(g) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X\rangle = b\}$ und P ein weiterer Punkt in $\mathcal{E}$. Leite folgende Formel für den Normalabstand her:

$$d(P, g) = \frac{|\langle n, x(P)\rangle - b|}{\|n\|}.$$

Betrachte nun Punkte A, B, C, D, E mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}, \quad x(D) = \begin{pmatrix}14\\5\end{pmatrix}, \quad x(E) = \begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$$

und bezeichne g die Gerade durch A und B.
(a) Welcher der Punkte C, D, E hat kleinsten Normalabstand von g?
(b) Gib auf jeder Seite von g einen Punkt mit Normalabstand 7 an.

Aufgabe 11.3 (Polare und Tangenten). Sei

$$\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle X - M, X - M\rangle = r^2\}$$

ein Kreis mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$. Ist $A \in \mathbb{R}^2$ ein weiterer, von M verschiedener Punkt, dann wird die Gerade

$$p = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle A - M, X - M\rangle = r^2\}$$

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html` die Polare von A bezüglich Γ genannt. Zeige:

(a) Liegt A auf Γ dann ist p die Tangente bei A.

(b) Liegt A im Äußeren von Γ dann schneidet p den Kreis in zwei Punkten und dies sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten durch A an Γ.

(c) Liegt A im Inneren von Γ dann haben p und Γ leeren Schnitt.

Aufgabe 11.4. Betrachte einen Kreis Γ und zwei Punkte A, B in $\mathbb{R}^2$, wobei

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 25 \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass A auf Γ liegt und gib eine Gleichung der Tangente bei A an Γ an.

(b) Zeige, dass B im Äußeren von Γ liegt und bestimme Gleichungen der beiden Tangenten durch B an Γ. Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.

Aufgabe 11.5 (Streckensymmetrale mittels kartesischer Koordinaten). Seien $A \neq B$ zwei Punkte in $\mathcal{E}$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut zu zeigen, dass die Menge

$$s = \{P \in \mathcal{E} : |PA| = |PB|\}$$

eine Gerade bildet, die orthogonal auf die Gerade $g(A, B)$ steht.

Aufgabe 11.6 (Umkreismittelpunkt mittels kartesischer Koordinaten). Zeige erneut, dass sich die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Verwende dazu ein kartesisches Koordinatensystem, beschreibe die Streckensymmetralen durch Normalvektordarstellungen und zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 11.7 (Kreis des Apollonius mit kartesischen Koordinaten). Seien $A \neq B$ zwei Punkte und $0 < \lambda \neq 1$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut (vgl. Aufgabe 8.7) zu zeigen, dass die Menge

$$\Gamma = \{P \in \mathcal{E} : |PA| = \lambda |PB|\}$$

einen Kreis bildet. Drücke seinen Radius durch λ und $|AB|$ aus. Zeige auch, dass sein Mittelpunkt M auf der Geraden $g(A, B)$ liegt und drücke das Teilverhältnis $\frac{AM}{MB}$ durch λ aus. Hinweis: Wähle das Koordinatensystem mit Ursprung A so, dass B auf der ersten Koordinatenachse liegt. Zeige, dass die definierende Gleichung von Γ zu einer Kreisgleichung äquivalent ist.

Aufgabe 11.8 (Potenzgerade in kartesischen Koordinaten). Betrachte zwei Kreise mit Mittelpunkten $M \neq M'$ und Radien $r, r' > 0$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut zu zeigen, dass die Menge

$$p = \{P \in \mathcal{E} : |PM|^2 - r^2 = |PM'|^2 - (r')^2\}$$

eine Gerade bildet, die normal auf $g := g(M, M')$ steht. Leite auch eine Formel für $d(M, p)$ her, die diesen Normalabstand durch r, r' und $d := |MM'|$ ausdrückt. Hinweis: Zeige, dass die definierende Gelichung von p äquivalent zu einer linearen Gleichung ist.