Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

11. Übungsblatt für die Woche vom 27. bis 31. Mai 2019

AUFGABE 11.1. Für beliebige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt:

(a) $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$
(b) $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$
(c) $\langle v+w, v-w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2$

In der Vorlesung wurde (a) gezeigt. Beweise nun (b) und (c). Leite daraus auch folgende beiden Beziehungen her:

(d) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big)$ (Parallelogrammgleichung)
(e) $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\big)$ (Polarisierungsidentität)

AUFGABE 11.2. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems, g eine Gerade mit Normalvektordarstellung $x(g) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X\rangle = b\}$ und P ein weiterer Punkt in $\mathcal{E}$. Leite folgende Formel für den Normalabstand her:

$$d(P, g) = \frac{|\langle n, x(P)\rangle - b|}{\|n\|}.$$

Betrachte nun Punkte A, B, C, D, E mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}, \quad x(D) = \begin{pmatrix}14\\5\end{pmatrix}, \quad x(E) = \begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$$

und bezeichne g die Gerade durch A und B.

(a) Welcher der Punkte C, D, E hat kleinsten Normalabstand von g?
(b) Gib auf jeder Seite von g einen Punkt mit Normalabstand 7 an.

AUFGABE 11.3 (Polare und Tangenten). Sei

$$\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle X - M, X - M\rangle = r^2\}$$

ein Kreis mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$. Ist $A \in \mathbb{R}^2$ ein weiterer, von M verschiedener Punkt, dann wird die Gerade

$$p = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle A - M, X - M\rangle = r^2\}$$

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html` die Polare von A bezüglich Γ genannt. Zeige:

(a) Liegt A auf Γ dann ist p die Tangente bei A.
(b) Liegt A im Äußeren von Γ dann schneidet p den Kreis in zwei Punkten und dies sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten durch A an Γ.
(c) Liegt A im Inneren von Γ dann haben p und Γ leeren Schnitt.

Aufgabe 11.4. Betrachte einen Kreis Γ und zwei Punkte A, B in $\mathbb{R}^2$, wobei

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 25 \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass A auf Γ liegt und gib eine Gleichung der Tangente bei A an Γ an.
(b) Zeige, dass B im Äußeren von Γ liegt und bestimme Gleichungen der beiden Tangenten durch B an Γ. Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.

Aufgabe 11.5 (Streckensymmetrale mittels kartesischer Koordinaten). Seien $A \neq B$ zwei Punkte in $\mathcal{E}$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut zu zeigen, dass die Menge

$$s = \{P \in \mathcal{E} : |PA| = |PB|\}$$

eine Gerade bildet, die orthogonal auf die Gerade $g(A, B)$ steht.

Aufgabe 11.6 (Umkreismittelpunkt mittels kartesischer Koordinaten). Zeige erneut, dass sich die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Verwende dazu ein kartesisches Koordinatensystem, beschreibe die Streckensymmetralen durch Normalvektordarstellungen und zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 11.7 (Kreis des Apollonius mit kartesischen Koordinaten). Seien $A \neq B$ zwei Punkte und $0 < \lambda \neq 1$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut (vgl. Aufgabe 8.7) zu zeigen, dass die Menge

$$\Gamma = \{P \in \mathcal{E} : |PA| = \lambda |PB|\}$$

einen Kreis bildet. Drücke seinen Radius durch λ und $|AB|$ aus. Zeige auch, dass sein Mittelpunkt M auf der Geraden $g(A, B)$ liegt und drücke das Teilverhältnis $\frac{AM}{MB}$ durch λ aus. Hinweis: Wähle das Koordinatensystem mit Ursprung A so, dass B auf der ersten Koordinatenachse liegt. Zeige, dass die definierende Gleichung von Γ zu einer Kreisgleichung äquivalent ist.

Aufgabe 11.8 (Potenzgerade in kartesischen Koordinaten). Betrachte zwei Kreise mit Mittelpunkten $M \neq M'$ und Radien $r, r' > 0$. Verwende ein kartesisches Koordinatensystem um erneut zu zeigen, dass die Menge

$$p = \{P \in \mathcal{E} : |PM|^2 - r^2 = |PM'|^2 - (r')^2\}$$

eine Gerade bildet, die normal auf $g := g(M, M')$ steht. Leite auch eine Formel für $d(M, p)$ her, die diesen Normalabstand durch r, r' und $d := |MM'|$ ausdrückt. Hinweis: Zeige, dass die definierende Gelichung von p äquivalent zu einer linearen Gleichung ist.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 11.1. Da $v - w = v + (-w)$ erhalten wir aus (a)

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \langle v, -w\rangle + \|-w\|^2 = \|v\|^2 - \langle v, w\rangle + \|w\|^2,$$

also (b). Mit der Bilinearität und Symmetrie des inneren Produkts folgt

$$\langle v + w, v - w\rangle = \langle v, v - w\rangle + \langle w, v - w\rangle = \langle v, v\rangle - \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle - \langle w, w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2,$$

also (c). Addition von (a) und (b) liefert (d), Subtraktion führt auf (e).

Zu Aufgabe 11.2. Sei Q ein Punkt auf g. Es gilt daher $\langle n, x(Q)\rangle = b$. Mit der Formel für den Normalabstand aus der Vorlesung erhalten wir sofort

$$d(P, g) = \frac{|\langle n, x(P) - x(Q)\rangle|}{\|n\|} = \frac{|\langle n, x(P)\rangle - \langle n, x(Q)\rangle|}{\|n\|} = \frac{|\langle n, x(P)\rangle - b|}{\|n\|}.$$

(a) Wir berechnen einen Richtungsvektor für g,

$$x(B) - x(A) = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

erhalten einen Normalvektor $n = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit Länge $\|n\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ und die Normalvektordarstellung $x(g) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X\rangle = 12\}$. Mit der Formel für den Normalabstand erhalten wir

$$\begin{aligned}
d(C, g) &= \frac{|\langle n, x(C)\rangle - 12|}{\|n\|} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 7 - 12|}{5} = 5, \\
d(D, g) &= \frac{|\langle n, x(D)\rangle - 12|}{\|n\|} = \frac{|3 \cdot 14 + 4 \cdot 5 - 12|}{5} = 10, \\
d(E, g) &= \frac{|\langle n, x(E)\rangle - 12|}{\|n\|} = \frac{|3 \cdot (-5) + 4 \cdot (-12) - 12|}{5} = 15,
\end{aligned}$$

also hat C kleinsten Normalabstand von g.

(b) Die Punkte F und G mit Koordinaten

$$\begin{aligned}
x(F) &= x(A) + \frac{7}{\|n\|} n = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{7}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 58/5 \end{pmatrix} \\
x(G) &= x(A) - \frac{7}{\|n\|} n = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{7}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

haben Normalabstand 7 von g und liegen auf verschiedenen Seiten dieser Gerade.

Zu Aufgabe 11.3. (a) Liegt A auf Γ, dann ist p eine Gerade, die normal auf den Radius $A - M$ steht und durch A läuft. Also stimmt p mit der Tangente bei A überein.

(b) Mit der Formel für den Normalabstand in Aufgabe 11.2 erhalten wir

$$d(M, p) = \frac{|\langle A - M, M - M\rangle - r^2|}{\|A - M\|} = \frac{r^2}{\|A - M\|}.$$

Liegt A im Äußeren von Γ dann gilt $\|A - M\| > r$, also $d(M, p) < r$ und daher schneidet p den Kreis in zwei Punkten. Ist X ein Schnittpunkt von Γ und p dann gilt

$$\langle X - M, X - M\rangle = r^2 \qquad \text{und} \qquad \langle A - M, X - M\rangle = r^2.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf

$$\begin{aligned}0 = r^2 - r^2 = \langle X - M, X - M\rangle - \langle A - M, X - M\rangle \\ = \langle (X - M) - (A - M), X - M\rangle = \langle X - A, X - M\rangle,\end{aligned}$$

also steht die Gerade durch X und A normal auf den Radius $X - M$ und ist daher tangential an den Kreis.

(c) Liegt A im Inneren von Γ dann gilt $\|A - M\| < r$, also $d(M, p) > r$ und daher schneidet p den Kreis Γ nicht.

Zu Aufgabe 11.4. (a) Da die Komponenten von A die Kreisgleichung erfüllen, liegt A auf Γ. Da die Tangente bei A Normalvektor $A - M = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ hat und durch A läuft, ist sie durch die Gleichung

$$3x_1 + 4x_2 = 43$$

beschrieben.

(b) Da $|MB|^2 = \|B - M\|^2 = (-3-2)^2 + (-7-3)^2 = 125 > 25$, liegt B im Äußeren von Γ. Die Polare von B ist durch die Gleichung $(-3-2)(x_1 - 2) + (-7-3)(x_2 - 3) = 25$ bzw. durch die äquivalente Gleichung

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

gegeben. Schneiden wir dies mit Γ erhalten wir zwei Schnittpunkte,

$$S_1 = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2 = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen Normalvektoren der beiden Tangenten,

$$S_1 - M = \begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2 - M = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix},$$

und erhalten die Gleichungen der beiden Tangenten,

$$x_1 = -3 \qquad \text{und} \qquad 3x_1 - 4x_2 = 19.$$

Zu Aufgabe 11.5. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems und bezeichnen $\tilde{A} := x(A)$ und $\tilde{B} := x(B)$ die Koordinaten von A und B. Für die Koordinatendarstellung von s erhalten wir

$$x(s) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \|\tilde{A} - X\| = \|\tilde{B} - X\|\}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{A} - X\| = \|\tilde{B} - X\| \\ \Leftrightarrow\quad & \|\tilde{A} - X\|^2 = \|\tilde{B} - X\|^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \|\tilde{A}\|^2 - 2\langle \tilde{A}, X\rangle + \|X\|^2 = \|\tilde{B}\|^2 - 2\langle \tilde{B}, X\rangle + \|X\|^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \langle \tilde{B} - \tilde{A}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\|\tilde{B}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\tilde{A}\|^2 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine Beschreibung von $x(s)$ durch eine lineare Gleichung,

$$x(s) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{B} - \tilde{A}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\|\tilde{B}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\tilde{A}\|^2\}.$$

Somit bildet $x(s)$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Normalvektor $\tilde{B} - \tilde{A} = x(B) - x(A)$. Daher ist s eine Gerade in $\mathcal{E}$, die normal auf $g(A, B)$ steht.

Zu Aufgabe 11.6. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems und $\tilde{A} := x(A)$, $\tilde{B} := x(B)$, $\tilde{C} := x(C)$ die Koordinaten der Eckpunkte. Bezeichnet s_a die Seitensymmetrale der Seite BC, dann ist $x(s_a)$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Normalvektor $x(C) - x(B) = \tilde{C} - \tilde{B}$, die durch den Streckenmittelpunkt mit Koordinaten $\frac{1}{2}(\tilde{B} + \tilde{C})$ läuft, siehe Aufgabe 10.3. Die Normalvektordarstellung dieser Seitensymmetrale lautet daher, siehe auch die vorangehende Aufgabe,

$$x(s_a) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{C} - \tilde{B}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\|\tilde{C}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\tilde{B}\|^2\}.$$

Für die Seitensymmetralen s_b und s_c gilt analog

$$x(s_b) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{A} - \tilde{C}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\|\tilde{A}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\tilde{C}\|^2\},$$
$$x(s_c) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{B} - \tilde{A}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\|\tilde{B}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\tilde{A}\|^2\}.$$

Beachte, dass die Gleichung für $x(s_c)$ das Negative der Summe der beiden Gleichungen für $x(s_a)$ und $x(s_b)$ ist, denn Addition der linken Seiten liefert

$$\langle \tilde{C} - \tilde{B}, X\rangle + \langle \tilde{A} - \tilde{C}, X\rangle = \langle (\tilde{C} - \tilde{B}) + (\tilde{A} - \tilde{C}), X\rangle = -\langle \tilde{B} - \tilde{A}, X\rangle.$$

Daher liegt jeder Punkt im Durchschnitt von $x(s_a)$ und $x(s_b)$ auch auf $x(s_c)$. Also sind $x(s_a)$, $x(s_b)$ und $x(s_c)$ drei konkurrente Geraden in $\mathbb{R}^2$. Daher schneiden sich auch Streckensymmetralen s_a, s_b und s_c in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt.

Zu Aufgabe 11.7. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung A so, dass B auf der ersten Kordinatenachse liegt. Bezeichnet $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die assoziierte Koordinatenabbildung, dann gilt $x(A) = 0$ und $x(B) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$. Für die Koordinatendarstellung von Γ erhalten wir

$$x(\Gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \lambda\sqrt{(x_1 - b)^2 + x_2^2} \right\}.$$

Eine Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
& & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} &= \lambda\sqrt{(x_1 - b)^2 + x_2^2} \\
&\Leftrightarrow & x_1^2 + x_2^2 &= \lambda^2\big((x_1 - b)^2 + x_2^2\big) \\
&\Leftrightarrow & x_1^2 + x_2^2 &= \lambda^2(x_1^2 + x_2^2) - 2\lambda^2 b x_1 + \lambda^2 b^2 \\
&\Leftrightarrow & (\lambda^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2) - 2\lambda^2 b x_1 &= -\lambda^2 b^2 \\
&\Leftrightarrow & x_1^2 + x_2^2 - 2\tfrac{\lambda^2 b}{\lambda^2 - 1} x_1 &= \tfrac{-\lambda^2 b^2}{\lambda^2 - 1} \\
&\Leftrightarrow & \Big(x_1 - \tfrac{\lambda^2 b}{\lambda^2 - 1}\Big)^2 + x_2^2 &= \tfrac{-\lambda^2 b^2}{\lambda^2 - 1} + \tfrac{\lambda^4 b^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \\
&\Leftrightarrow & \Big(x_1 - \tfrac{\lambda^2 b}{\lambda^2 - 1}\Big)^2 + x_2^2 &= \tfrac{\lambda^2 b^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \\
&\Leftrightarrow & (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 &= r^2
\end{aligned}$$

wobei

$$m_1 := \tfrac{\lambda^2 b}{\lambda^2 - 1}, \qquad m_2 := 0, \qquad \text{und} \qquad r := \frac{\lambda|b|}{|\lambda^2 - 1|} = \frac{\lambda|AB|}{|\lambda^2 - 1|}.$$

Wir erhalten die Darstellung

$$x(\Gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2 \right\},$$

also ist Γ ein Kreis mit Radius r, dessen Mittelpunkt M die Koordinaten $x(M) = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ hat. Da die zweite Koordinate von M verschwindet, liegt M auf der ersten Koordinatenachse, d.h. auf der Geraden durch A und B. Schließlich

$$\frac{AM}{MB} = \frac{x_1(M) - x_1(A)}{x_1(B) - x_1(M)} = \frac{m_1 - 0}{b - m_1} = -\lambda^2.$$

Zu Aufgabe 11.8. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems und bezeichnen $\tilde{M} := x(M)$ und $\tilde{M}' := x(M')$ die Koordinaten der Mittelpunkte. Wir erhalten dir Koordinatendarstellung

$$x(p) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \|\tilde{M} - X\|^2 - r^2 = \|\tilde{M}' - X\|^2 - (r')^2\}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{M} - X\|^2 - r^2 = \|\tilde{M}' - X\|^2 - (r')^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \|\tilde{M}\|^2 - 2\langle \tilde{M}, X\rangle + \|X\|^2 - r^2 = \|\tilde{M}'\|^2 - 2\langle \tilde{M}', X\rangle + \|X\|^2 - (r')^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \langle \tilde{M}' - \tilde{M}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\big(r^2 - (r')^2 - \|\tilde{M}\|^2 + \|\tilde{M}'\|^2\big) \end{aligned}$$

Wir erhalten die Darstellung

$$x(p) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{M}' - \tilde{M}, X\rangle = \tfrac{1}{2}\big(r^2 - (r')^2 - \|\tilde{M}\|^2 + \|\tilde{M}'\|^2\big)\},$$

also bildet $x(p)$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Normalvektor $x(M') - x(M) = \tilde{M}' - \tilde{M}$. Daher ist p eine Gerade in $\mathcal{E}$, die normal auf $g := g(M, M')$ steht. Für den Normalabstand erhalten wir

$$\begin{aligned} d(M,p) &= \frac{|\langle \tilde{M}' - \tilde{M}, \tilde{M}\rangle - \frac{1}{2}(r^2 - (r')^2 - \|\tilde{M}\|^2 + \|\tilde{M}'\|^2)|}{\|\tilde{M}' - \tilde{M}\|} \\ &= \frac{|-2\langle \tilde{M}' - \tilde{M}, \tilde{M}\rangle + r^2 - (r')^2 - \|\tilde{M}\|^2 + \|\tilde{M}'\|^2|}{2\|\tilde{M}' - \tilde{M}\|} \\ &= \frac{|\|\tilde{M}' - \tilde{M}\|^2 + r^2 - (r')^2|}{2\|\tilde{M}' - \tilde{M}\|} \\ &= \frac{|d^2 + r^2 - (r')^2|}{2d}, \end{aligned}$$

wobei $d := |MM'| = \|\tilde{M}' - \tilde{M}\|$.