Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

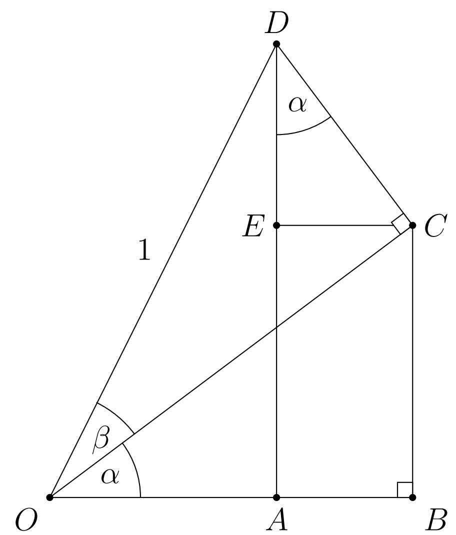
Sommersemester 2019 (UE250163)

12. Übungsblatt für die Woche vom 3. bis 7. Juni 2019

Aufgabe 12.1. Beweise mit Hilfe der Abbildung die Additionstheoreme

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

für den Fall, dass die Winkel $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ alle zwischen $0°$ und $90°$ liegen. Hinweis: Drücke die



Längen der Strecken zwischen markierten Punkten mittels Winkelfunktionen aus.

Aufgabe 12.2.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Winkel α zeige

$$\cos\big((n+1)\alpha\big) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - \cos\big((n-1)\alpha\big).$$

Hinweis: Wende das Additionstheorem auf $\cos((n+1)\alpha)$ und $\cos((n-1)\alpha)$ an.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(b) Verwende (a), um folgende Formeln zu überprüfen:

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= 2\cos^2\alpha - 1 \\
\cos(3\alpha) &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\
\cos(4\alpha) &= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 \\
\cos(5\alpha) &= 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha
\end{aligned}$$

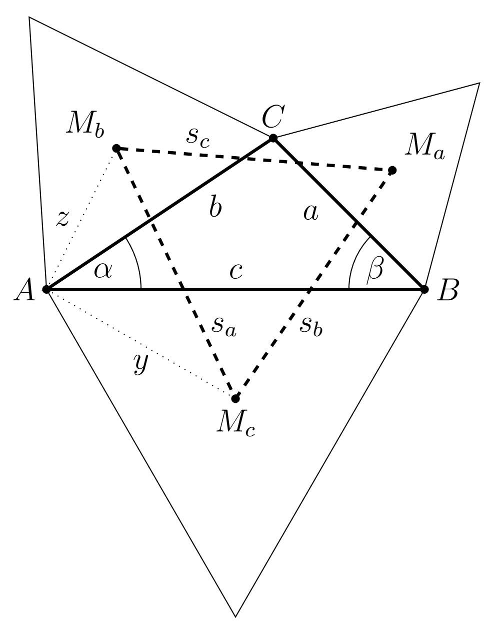
(c) Zeige mit Hilfe der letzten Formel in (b), dass

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Hinweis: $\cos(5 \cdot 18^\circ) = 0$.

Aufgabe 12.3. Sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkeln $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Erkläre, wie mit Hilfe trigonometrischer Formeln aus drei der Größen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ die restlichen berechnet werden können. Diskutiere dabei jeden der Fälle: SSS, SWS, WSW, SWW, SSW. In einem dieser Fälle ist das Dreieck i.A. nicht eindeutig bestimmt, wie spiegelt sich dies bei der Berechnung mit trigonometrischen Formeln wider? Im SSS-Fall dürfen die Seitenlängen nicht beliebig sein, wo geht dies bei der Berechnung der anderen Größen ein? Was kann im W:W:W Fall über die Seitenlängen ausgesagt (berechnet) werden?

Aufgabe 12.4 (Satz von Napoleon). Werden über jeder Seite eines Dreiecks ABC außen gleichseitige Dreiecke errichtet, dann bilden ihre Mittelpunkte selbst ein gleichseitiges Dreieck. Beweise diesen Satz trigonometrisch wie folgt:



(a) Zeige $b/2 = z\cos 30^\circ$, $c/2 = y\cos 30^\circ$ und

$$s_a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos(30^\circ + \alpha + 30^\circ).$$

(b) Schließe daraus $y = c/\sqrt{3}$, $z = b/\sqrt{3}$ und

$$3s_a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + \sqrt{3}bc\sin\alpha.$$

(c) Erkläre, wie daraus folgt:

$$3s_a^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\alpha}{a}.$$

(d) Erkläre, warum auch folgende Relationen gelten:

$$3s_b^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\beta}{b}$$
$$3s_c^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\gamma}{c}.$$

(e) Wie folgt daraus $s_a = s_b = s_c$?

Aufgabe 12.5.

(a) Seien A, B, C drei 2×2-Matrizen. Zeige $(A+B)C = AC + BC$ und $A(BC) = (AB)C$ ohne die Summenschreibweise zu verwenden.

(b) Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne $(A+B)C$, $AC+BC$, $(AB)C$ und $A(BC)$ direkt, d.h. ohne Zuhilfenahme der Rechenregel in (a).

(c) Berechne A^{-1} und gib eine 2×2-Matrix an, für die $AX = B$ gilt.

Aufgabe 12.6. Betrachte die affinen Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 + 3 \\ 2x_1 + x_2 + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$
$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 7x_2 + 2 \\ x_1 - 5x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Gib die Komposition $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in derselben Form an.

(b) Gib die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in derselben Form an.

(c) Berechne $\varphi\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(d) Bestimme einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(P) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 12.7. (a) Bestimme eine affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = Ax + b$, mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \varphi\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Bezüglich eines affinen Koordinatensystems haben die Punkte P, Q, R, S Koordinaten

$$x(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x(R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(S) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich eines weiteren affinen Koordinatensystems haben P, Q, R Koordinaten

$$x'(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x'(Q) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x'(R) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Koordinaten $x'(S)$. Hinweis: Es existiert eine affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $x'(Z) = \varphi(x(Z))$ für alle Punkte Z gilt.

Aufgabe 12.8.

(a) Gib die Spiegelung an der Achse $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 = 3 \right\}$ in der Form $\sigma(x) = Ax + b$ an.

(b) Gib die Spiegelung an der Achse $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = 2 \right\}$ in der Form $\sigma'(x) = A'x + b'$ an.

(c) Zeige, dass die Komposition $\rho = \sigma' \circ \sigma$ eine Rotation ist und bestimme ihr Zentrum sowie ihren Drehwinkel.