Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

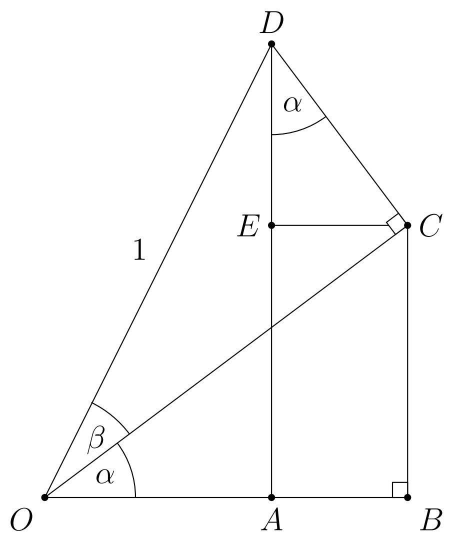
Sommersemester 2019 (UE250163)

12. Übungsblatt für die Woche vom 3. bis 7. Juni 2019

Aufgabe 12.1. Beweise mit Hilfe der Abbildung die Additionstheoreme

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

für den Fall, dass die Winkel $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ alle zwischen 0° und 90° liegen. Hinweis: Drücke die



Längen der Strecken zwischen markierten Punkten mittels Winkelfunktionen aus.

Aufgabe 12.2.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Winkel α zeige

$$\cos\big((n+1)\alpha\big) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - \cos\big((n-1)\alpha\big).$$

Hinweis: Wende das Additionstheorem auf $\cos((n+1)\alpha)$ und $\cos((n-1)\alpha)$ an.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(b) Verwende (a), um folgende Formeln zu überprüfen:

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= 2\cos^2\alpha - 1 \\
\cos(3\alpha) &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\
\cos(4\alpha) &= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 \\
\cos(5\alpha) &= 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha
\end{aligned}$$

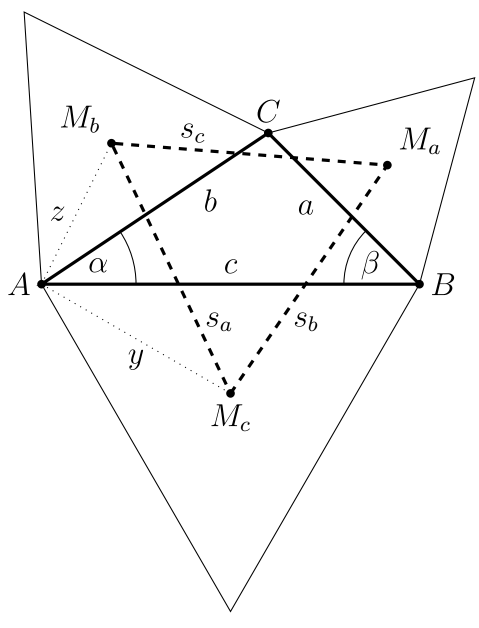
(c) Zeige mit Hilfe der letzten Formel in (b), dass

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Hinweis: $\cos(5 \cdot 18^\circ) = 0$.

Aufgabe 12.3. Sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkeln $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Erkläre, wie mit Hilfe trigonometrischer Formeln aus drei der Größen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ die restlichen berechnet werden können. Diskutiere dabei jeden der Fälle: SSS, SWS, WSW, SWW, SSW. In einem dieser Fälle ist das Dreieck i.A. nicht eindeutig bestimmt, wie spiegelt sich dies bei der Berechnung mit trigonometrischen Formeln wider? Im SSS-Fall dürfen die Seitenlängen nicht beliebig sein, wo geht dies bei der Berechnung der anderen Größen ein? Was kann im W:W:W Fall über die Seitenlängen ausgesagt (berechnet) werden?

Aufgabe 12.4 (Satz von Napoleon). Werden über jeder Seite eines Dreiecks ABC außen gleichseitige Dreiecke errichtet, dann bilden ihre Mittelpunkte selbst ein gleichseitiges Dreieck. Beweise diesen Satz trigonometrisch wie folgt:



(a) Zeige $b/2 = z\cos 30^\circ$, $c/2 = y\cos 30^\circ$ und

$$s_a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos(30^\circ + \alpha + 30^\circ).$$

(b) Schließe daraus $y = c/\sqrt{3}$, $z = b/\sqrt{3}$ und

$$3s_a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + \sqrt{3}bc\sin\alpha.$$

(c) Erkläre, wie daraus folgt:

$$3s_a^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\alpha}{a}.$$

(d) Erkläre, warum auch folgende Relationen gelten:

$$3s_b^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\beta}{b}$$
$$3s_c^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}abc\frac{\sin\gamma}{c}.$$

(e) Wie folgt daraus $s_a = s_b = s_c$?

Aufgabe 12.5.

(a) Seien A, B, C drei 2×2-Matrizen. Zeige $(A+B)C = AC + BC$ und $A(BC) = (AB)C$ ohne die Summenschreibweise zu verwenden.

(b) Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne $(A+B)C$, $AC+BC$, $(AB)C$ und $A(BC)$ direkt, d.h. ohne Zuhilfenahme der Rechenregel in (a).

(c) Berechne A^{-1} und gib eine 2×2-Matrix X an, für die $AX = B$ gilt.

Aufgabe 12.6. Betrachte die affinen Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 + 3 \\ 2x_1 + x_2 + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$
$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 7x_2 + 2 \\ x_1 - 5x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Gib die Komposition $\psi\circ\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in derselben Form an.

(b) Gib die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in derselben Form an.

(c) Berechne $\varphi\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(d) Bestimme einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(P) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 12.7. (a) Bestimme eine affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = Ax + b$, mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \varphi\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Bezüglich eines affinen Koordinatensystems haben die Punkte P, Q, R, S Koordinaten

$$x(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x(R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(S) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich eines weiteren affinen Koordinatensystems haben P, Q, R Koordinaten

$$x'(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x'(Q) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x'(R) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Koordinaten $x'(S)$. Hinweis: Es existiert eine affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $x'(Z) = \varphi(x(Z))$ für alle Punkte Z gilt.

Aufgabe 12.8.

(a) Gib die Spiegelung an der Achse $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 = 3 \right\}$ in der Form $\sigma(x) = Ax + b$ an.

(b) Gib die Spiegelung an der Achse $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = 2 \right\}$ in der Form $\sigma'(x) = A'x + b'$ an.

(c) Zeige, dass die Komposition $\rho = \sigma' \circ \sigma$ eine Rotation ist und bestimme ihr Zentrum sowie ihren Drehwinkel.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 12.1. Aus der Skizze lesen wir ab:

$$\begin{aligned}
|OC| &= |OD| \cos\beta = \cos\beta, \\
|CD| &= |OD| \sin\beta = \sin\beta, \\
|DE| &= |CD| \cos\alpha = \cos\alpha \sin\beta, \\
|AE| &= |BC| = |OC| \sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta, \\
|OB| &= |OC| \cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta, \\
|AB| &= |EC| = |CD| \sin\alpha = \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) = |OA| = |OB| - |AB| = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\
\sin(\alpha+\beta) = |AD| = |DE| + |AE| = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 12.2. (a) Aus dem Additionstheorem des Kosinus folgt:

$$\begin{aligned}
\cos((n+1)\alpha) = \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha \\
\cos((n-1)\alpha) = \cos(n\alpha)\cos\alpha + \sin(n\alpha)\sin\alpha
\end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert die gesuchte Rekursionsformel.

(b) Aus der Doppelwinkelformel für den Kosinus erhalten wir

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Kombinieren wir dies mit der Formel in (a) folgt

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= 2\cos\alpha\cos(2\alpha) - \cos\alpha \\
&= 2\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Zweifaches Anwenden der Doppelwinkelformel des Kosinus führt auf

$$\begin{aligned}\cos(4\alpha) &= 2\cos^2(2\alpha) - 1\\ &= 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1\\ &= 2(4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1) - 1\\ &= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.\end{aligned}$$

Mit der Formel in (a) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\cos(5\alpha) &= 2\cos\alpha\cos(4\alpha) - \cos(3\alpha)\\ &= 2\cos\alpha(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1) - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)\\ &= 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.\end{aligned}$$

(c) Setzen wir $z := \cos 18°$, dann gilt wegen der Formel in (b)

$$0 = \cos 90° = \cos(5\cdot 18°) = 16\cos^5 18° - 20\cos^3 18° + 5\cos 18° = 16z^5 - 20z^3 + 5z$$

und somit auch

$$16z^4 - 20z^2 + 5 = 0,$$

denn $z \neq 0$. Lösen dieser Gleichung führt auf

$$\cos 18° = \pm\frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Da $\sqrt{3}/2 = \cos 30° < \cos 18°$ muss $\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ gelten.

Zu Aufgabe 12.3. SSS: Es sind also die Seitenlängen a, b, c gegeben und wir wollen die Winkel α, β, γ bestimmen. Das Dreieck kann nur existieren, wenn die Dreiecksungleichungen gelten. Die Dreiecksungleichungen $a < b + c$ und $b < c + a$ sind zu

$$-1 \leq \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \leq 1$$

äquivalent. In diesem Fall existiert daher ein (eindeutiger) Winkel $0 < \alpha < 180°$ mit

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha.$$

Nach dem Kosinussatz ist dies der Winkel bei A. Analog lassen sich die anderen Winkel berechnen, vorausgesetzt es ist auch die dritte Dreiecksungleichung $c < a + b$ erfüllt.

SWS: Mit dem Kosinussatz kann die dritte Seite berechnet werden, womit das Problem auf SSS zurückgeführt ist.

WSW und SWW: Das Dreieck kann nur existieren, wenn die Summe der beiden gegebenen Winkel kleiner als $180°$ ist. Mittels $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ berechnen wir zunächst den dritten Winkel und dann mit dem Sinussatz die verbleibenden beiden Seiten.

SSW: Seien also a, b, α gegeben. Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha \geq 90°$. Da dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt, kann das Dreieck nur existieren, wenn $a > b$. In diesem Fall gilt $0 < \frac{b}{a}\sin\alpha < 1$, also existiert genau ein Winkel $0 < \beta < 90°$ mit $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$. Nach dem Sinussatz ist dies der Winkel bei B. Nun zum Fall $0 < \alpha < 90°$. Ein Dreieck kann nur existieren, wenn $a > b\sin\alpha$ ist. In diesem Fall existieren (i.A. zwei) Winkel $0 < \beta < 180°$ mit $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$. Ist $a < b$ erhalten wir zwei Dreiecke. Ist $a \geq b$

muss auch β spitz sein und wir erhalten nur ein Dreieck. In beiden Fällen ist das Problem damit auf SWW zurückgeführt.

W:W:W: Sind die drei Winkel gegeben, können mit dem Sinussatz die Verhältnisse a/b, b/c und c/a berechnet werden. Damit sind die Dreiecksseiten bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt.

Zu Aufgabe 12.4. (a) Die ersten beiden Gleichungen folgen aus $\sphericalangle M_bAC = 30° = \sphericalangle M_cAB$, die dritte ist der Kosinussatz im Dreieck M_bAM_c bei A.

(b) Da $\cos 30° = \sqrt{3}/2 = \sin 60°$ und $\cos 60° = 1/2$ folgt dies aus (a) mit Hilfe des Additionstheorems $\cos(\alpha + 60°) = \cos\alpha\cos 60° - \sin\alpha\sin 60°$.

(c) Folgt durch Kombination von (b) mit dem Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

(d) Analog, bzw. durch Umbenennen der Eckpunkte A, B, C.

(e) Wegen des Sinussatzes: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

Zu Aufgabe 12.5. (a)

$$\begin{aligned}(A+B)C &= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})c_{11} + (a_{12}+b_{12})c_{21} & (a_{11}+b_{11})c_{12} + (a_{12}+b_{12})c_{22} \\ (a_{21}+b_{21})c_{11} + (a_{22}+b_{22})c_{21} & (a_{21}+b_{21})c_{12} + (a_{22}+b_{22})c_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AC+BC &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}+b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21}+b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}+b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir sehen daher, dass die Eintragungen von $(A+B)C$ mit den Eintragungen von $AC+BC$ ürbereinstimmen, i.W. wegen des Distributivgesetzes in $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(AB)C &= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A(BC) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22})\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir sehen daher, dass die Eintragungen von $(AB)C$ mit den Eintragungen von $A(BC)$ ürbereinstimmen, i.W. wegen der Assoziativ- und Distributivgesetze in $\mathbb{R}$.

(b)

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad (A+B)C = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad BC = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad AC + BC = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad (AB)C = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A(BC) = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 4 - 2 \cdot 5} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}, \qquad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 12.6. (a) Ist $\varphi(x) = Ax + b$ und $\psi(x) = A'x + b'$ dann gilt $(\psi \circ \varphi)(x) = A'(Ax+b) + b' = (A'A)x + (A'b + b')$, siehe Vorlesung. Wir haben

$$A'A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A'b + b' = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\psi \circ \varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (\psi \circ \varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 - x_2 + 1 \\ -5x_1 - 2x_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Ist $\varphi(x) = Ax + b$ und A invertierbar, dann gilt $\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$, siehe Vorlesung. Wir haben

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also

$$\varphi^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$P = \varphi^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 12.7. (a) Schreiben wir $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ dann soll gelten:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + b_1 \\ a_{21} + a_{22} + b_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} + b_1 \\ a_{21} + 2a_{22} + b_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} + 3a_{12} + b_1 \\ -a_{21} + 3a_{22} + b_2 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf zwei lineare Gleichungssysteme in je drei Variablen:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + b_1 &= 12 \\ a_{11} + 2a_{12} + b_1 &= 15 \\ -a_{11} + 3a_{12} + b_1 &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{21} + a_{22} + b_2 &= 9 \\ a_{21} + 2a_{22} + b_2 &= 10 \\ -a_{21} + 3a_{22} + b_2 &= 7 \end{aligned}$$

Wir erhalten $a_{11} = 4$, $a_{12} = 3$, $b_1 = 5$ und $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$, $b_2 = 6$, also

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 + 5 \\ 2x_1 + x_2 + 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert, sodass $x'(Z) = \varphi(x(Z))$, für alle $Z \in \mathcal{E}$. Schreiben wir $\varphi(x) = Ax + b$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ dann muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + 3a_{12} + b_1 \\ 2a_{21} + 3a_{22} + b_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{11} + 2a_{12} + b_1 \\ 3a_{21} + 2a_{22} + b_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + b_1 \\ a_{21} + a_{22} + b_2 \end{pmatrix}.$$

Wie in (a) erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 4 \\ x_1 + 3x_2 - 5 \end{pmatrix}.$$

Damit nun

$$x'(S) = \varphi(x(S)) = \varphi \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 12.8. (a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass sich diese Spiegelung in der Form $\sigma(x) = x - 2\langle n, x-a\rangle n$ schreiben lässt, wobei a ein Punkt der Spiegelungsachse und n ein normierter Normalvektor ist. Mit $n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $a = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - 2\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x_2+3\\x_1-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Daher $\sigma(x) = Ax + b$ mit

$$A = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}.$$

(b) Wie in (a) erhalten wir mit $n' = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $a' = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ sofort

$$\begin{aligned}\sigma'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - 2\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4-x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Daher $\sigma'(x) = A'x + b'$ mit

$$A' = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b' = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}.$$

(c) Für die Komposition $\rho = \sigma' \circ \sigma$ erhalten wir $\rho(x) = (\sigma' \circ \sigma)(x) = A'(Ax+b) + b' = (A'A)x + (A'b + b') = A''x + b''$ mit

$$\begin{aligned}A'' &:= A'A = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix},\\ b'' &:= A'b + b' = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Beachte, dass A'' die Rotationsmatrix mit Drehwinkel 90° ist. Für den Schnittpunkt der Spiegelungsachsen, $m = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, gilt $\rho(m) = m$. Somit $A''m + b'' = m$, also $\rho(x) = A''x + b'' = A''(x-m) + m$. Dies zeigt, dass ρ eine Drehung um den Winkel 90° mit Zentrum m ist.