Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

14. Übungsblatt für die Woche vom 17. bis 21. Juni 2019

Aufgabe 14.1. Bestimme alle Lösungen folgender Gleichungssysteme:
(a)

$$\begin{array}{rrrcr} -x & -2y & +5z & = & -2 \\ 2x & +6y & -16z & = & 2 \\ 3x & +9y & -23z & = & 4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & 8x_4 & = & 16 \\ -2x_1 & -4x_2 & -5x_3 & -3x_4 & = & -9 \\ -3x_1 & -6x_2 & -7x_3 & -2x_4 & = & -4 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrrrcr} -x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -5 \\ -3x_1 & +5x_2 & -3x_3 & -2x_4 & = & -5 \\ 3x_1 & & +4x_3 & +15x_4 & = & 34 \end{array}$$

Aufgabe 14.2. (a) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -12x_4 & -12x_5 & = & -21 \\ x_1 & -3x_2 & -5x_3 & -18x_4 & -20x_5 & = & -41 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +6x_5 & = & 15 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +16x_4 & +17x_5 & = & 35 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung. Gib auch ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum an.

(b) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +6x_5 & & 7x_7 & +8x_8 & = & 10 \\ & & & x_4 & +4x_5 & & +9x_7 & & = & 11 \\ & & & & & x_6 & & +5x_8 & = & 12 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung.

Beispiele unter http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html

Aufgabe 14.3. Bestimme die Inversen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.4. Betrachte die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Inverse A^{-1} sowie eine Matrix X, für die $XA = B$ gilt.

Aufgabe 14.5. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix mit $D := ad - bc \neq 0$. Verwende das Eliminationsverfahren, um die Inverse von A zu bestimmen und bestätige damit erneut die bekannte Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.6. Zeige, dass die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + y + z + w \\ x + y - z - w \\ x - y + z - w \\ x - y - z + w \end{pmatrix},$$

bijektiv ist und bestimme die Umkehrabbildung.

Aufgabe 14.7. Zeige, dass eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ durch ihre Eckensummen

$$\begin{aligned} e &:= b + c + d \\ f &:= a + c + d \\ g &:= a + b + d \\ h &:= a + b + c \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt ist und drücke die Eintragungen von A durch e, f, g, h aus. Gibt es zu beliebig vorgegebenen Zahlen e, f, g, h stets eine Matrix A mit diesen Eckensummen?

Aufgabe 14.8. Für welche Werte von λ sind folgende Matrix invertierbar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda & 4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende Zeilenumformungen, um die Matrzien auf Zeienstufenform zu bringen.