# Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

## 15. Übungsblatt für die Woche vom 24. bis 28. Juni 2019

AUFGABE 15.1. (a) Beschreibe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix}1\\3\\5\\9\end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\2\end{pmatrix} : s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

durch eine lineare Gleichung.

(b) Beschreibe

$$E := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix}1\\-2\\-8\\-9\\-10\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\-3\\-3\end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix}-1\\3\\13\\15\\17\end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

durch ein lineares Gleichungssystem.

AUFGABE 15.2. Zeige durch eine direkte Rechnung, dass

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

für beliebige $2 \times 2$-Matrizen $A$ und $B$ gilt.

AUFGABE 15.3. (a) Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks $ABC$, dessen Eckpunkte folgende kartesische Koordinaten haben:

$$x(A) = \begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Gib die Koordinaten eines weiteren Punktes $D$ an, sodass das Dreieck $DBC$ Flächeninhalt 1 hat.

Beispiele unter http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html

Aufgabe 15.4. Berechne folgende Determinanten, einmal mit der Regel von Sarrus und einmal mit Zeilenumformungen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 15.5. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} 3x & +2y & +z & = & 1 \\ x & -y & +2z & = & 0 \\ 4x & +2y & +3z & = & 1 \end{array}$$

einmal mit der Cramer'schen Regel und einmal mit Zeilenumformungen.

Aufgabe 15.6. Beschreibe die Ebene

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

durch eine lineare Gleichung. Erkläre zwei verschiedene Lösungswege: Verwende beim einen das Kreuzprodukt und gehe beim anderen wie in Aufgabe 15.1 vor.

Aufgabe 15.7. (a) Betrachte die beiden windschiefen Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimme eine Gerade $h$, die $g_1$ und $g_2$ orthogonal schneidet.

Aufgabe 15.8 (Normalabstand eines Punktes von einer Ebene). Seien $P$ ein Punkt und $\varepsilon$ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Unter dem Normalabstand von $P$ zu $\varepsilon$ verstehen wir den Abstand $d(P, \varepsilon) := \|F - P\|$, wobei $F$ den Fußpunkt des Lots durch $P$ auf $\varepsilon$ bezeichnet.

(a) Sei $\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n, x \rangle = b\}$ eine Ebene in Normalvektordarstellung mit Normalvektor $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$. Gib eine Formel an, die den Normalabstand $d(P, \varepsilon)$ durch $n, b, P$ ausdrückt und beweise sie.

(b) Sei $\varepsilon = \{Q + sv + tw : s, t \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene in Parameterdarstellung mit linear unabhängigen Richtungsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$. Gib eine Formel an, die den Normalabstand $d(P, \varepsilon)$ durch $Q, v, w, P$ ausdrückt und beweise sie.