Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

15. Übungsblatt für die Woche vom 24. bis 28. Juni 2019

Aufgabe 15.1. (a) Beschreibe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix}1\\3\\5\\9\end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\2\end{pmatrix} : s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

durch eine lineare Gleichung.

(b) Beschreibe

$$E := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix}1\\-2\\-8\\-9\\-10\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\-3\\-3\end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix}-1\\3\\13\\15\\17\end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

durch ein lineares Gleichungssystem.

Aufgabe 15.2. Zeige durch eine direkte Rechnung, dass

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

für beliebige 2×2-Matrizen A und B gilt.

Aufgabe 15.3. (a) Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, dessen Eckpunkte folgende kartesische Koordinaten haben:

$$x(A) = \begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Gib die Koordinaten eines weiteren Punktes D an, sodass das Dreieck DBC Flächeninhalt 1 hat.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 15.4. Berechne folgende Determinanten, einmal mit der Regel von Sarrus und einmal mit Zeilenumformungen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 15.5. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} 3x & +2y & +z & = & 1 \\ x & -y & +2z & = & 0 \\ 4x & +2y & +3z & = & 1 \end{array}$$

einmal mit der Cramer'schen Regel und einmal mit Zeilenumformungen.

Aufgabe 15.6. Beschreibe die Ebene

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

durch eine lineare Gleichung. Erkläre zwei verschiedene Lösungswege: Verwende beim einen das Kreuzprodukt und gehe beim anderen wie in Aufgabe 15.1 vor.

Aufgabe 15.7. (a) Betrachte die beiden windschiefen Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimme eine Gerade h, die g_1 und g_2 orthogonal schneidet.

Aufgabe 15.8 (Normalabstand eines Punktes von einer Ebene). Seien P ein Punkt und ε eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Unter dem Normalabstand von P zu ε verstehen wir den Abstand $d(P, \varepsilon) := \|F - P\|$, wobei F den Fußpunkt des Lots durch P auf ε bezeichnet.

(a) Sei $\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n, x \rangle = b\}$ eine Ebene in Normalvektordarstellung mit Normalvektor $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$. Gib eine Formel an, die den Normalabstand $d(P, \varepsilon)$ durch n, b, P ausdrückt und beweise sie.

(b) Sei $\varepsilon = \{Q + sv + tw : s, t \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene in Parameterdarstellung mit linear unabhängigen Richtungsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$. Gib eine Formel an, die den Normalabstand $d(P, \varepsilon)$ durch Q, v, w, P ausdrückt und beweise sie.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 15.1. (a) Wir fassen die Richtungsvektoren zu einer Matrix zusammen, bringen diese mittels elementarer Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -14 & -7 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 6 \end{pmatrix},$$

und lesen eine lineare Gleichung für H ab: $H = \{x \in \mathbb{R}^4 : 7x_2 - 6x_3 + x_4 = 2\}$.

(b) Wir fassen die Richtungsvektoren zu einer Matrix zusammen, bringen diese mittels elementarer Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -8 & -3 & 13 \\ -9 & -3 & 15 \\ -10 & -3 & 17 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 5 \\ -9 & 6 & 6 \\ -10 & 7 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen ein Gleichngssystem für E ab:

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{rrrrrrr} -2x_1 & -5x_2 & +x_3 & & & = & -6 \\ -3x_1 & -6x_2 & & +x_4 & & = & -8 \\ -4x_1 & -7x_2 & & & +x_5 & = & -10 \end{array} \right\}$$

Zu Aufgabe 15.2. Bezeichnen wir die Eintragungen der Matrizen mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= \det(A)\det(B). \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 15.3. (a) Wir berechnen

$$v = x(B) - x(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad w = x(A) - x(C) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und erhalten mit der Flächenformel aus der Vorlesung

$$F(ABC) = \tfrac{1}{2}|\det(v,w)| = \tfrac{1}{2}\left|\det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}|4 \cdot 9 - 6 \cdot 5| = \tfrac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

(b) Wir suchen einen geeigneten Punkt D auf der Geraden durch C und A und machen daher den Ansatz $x(D) = x(C) + \lambda w$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus der Flächenformel folgt

$$F(DBC) = \tfrac{1}{2}|\det(v, \lambda w)| = \tfrac{1}{2}|\lambda \det(v,w)| = \tfrac{1}{2}|\det(v,w)| \cdot |\lambda| = F(ABC)|\lambda| = 3|\lambda|.$$

Wählen wir $\lambda = 1/3$ erhalten wir $x(D) = x(C) + \frac{1}{3}w = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $F(DBC) = 1$.

Zu Aufgabe 15.4.

$$\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix} = 0\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot 1 = 1$$

$$\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&2&2\\1&5&7\end{vmatrix} &= 1\cdot 2\cdot 7 + 2\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot(-2)\cdot 5 - 1\cdot 2\cdot 5 - 2\cdot(-2)\cdot 7 - 3\cdot 2\cdot 1\\ &= 14 + 4 - 30 - 10 + 28 - 6 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&2&2\\1&5&7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&3\\0&6&8\\0&3&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&3\\0&6&8\\0&0&0\end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&0\end{vmatrix} &= 0\cdot 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot(-1)\\ &\qquad - 0\cdot(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot(-1)\cdot 0 - 2\cdot 2\cdot 2\\ &= 0 + 2 + 2 - 0 - 0 - 8 = -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&0\end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix}-1&2&-1\\0&-1&2\\2&-1&0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-1&2&-1\\0&-1&2\\0&3&-2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-1&2&-1\\0&-1&2\\0&0&4\end{vmatrix}\\ &= -(-1)\cdot(-1)\cdot 4 = -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix} &= 1\cdot 2\cdot 9 + 1\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 9 - 1\cdot 2\cdot 1\\ &= 18 + 4 + 3 - 12 - 9 - 2 = 2\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&2\end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 = 2$$

Zu Aufgabe 15.5. Für die Cramer'sche Regel berechnen wir die Determinanten

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&-1&2\\4&2&3\end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&2\\1&2&3\end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix}3&1&1\\1&0&2\\4&1&3\end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix}3&2&1\\1&-1&0\\4&2&1\end{vmatrix} = 1$$

und erhalten

$$x = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}, \qquad y = \frac{0}{-5} = 0, \qquad z = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}.$$

Das Eliminationsverfahren liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right)$$

und wir erhalten erneut $x = 2/5$, $y = 0$, $z = -1/5$.

Zu Aufgabe 15.6. Das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren liefert den Normalvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Ebene und wir erhalten die Darstellung

$$\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + x_2 = -1\}.$$

Alternativ fassen wir die Richtungsvektoren zu einer Matrix zusammen, bringen diese mittels Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und lesen eine Gleichung der Ebene ab: $\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + x_2 = -1\}$.

Zu Aufgabe 15.7. Da h normal auf g_1 und g_2 steht muss h Richtungsvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

haben. Da h die Gerade g_1 schneidet muss h in der Ebene

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 13\}$$

liegen. Wir schneiden ε mit g_2 und erhalten den Schnittpunkt

$$S_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Da h in ε liegt und g_2 schneidet muss h durch S_2 gehen. Wir erhalten

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Schneiden wir h mit g_1 erhalten wir den Schnittpunkt

$$S_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 15.8. (a) Das Lot durch P auf ε kann durch die Parameterdarstellung $\{P + tn : t \in \mathbb{R}\}$ beschrieben werden. Um den Fußpunkt F des Lots zu erhalten schneiden wir das Lot mit der Ebene und erhalten $\langle n, P + tn\rangle = b$. Daher $F = P + tn$ mit $t = \frac{b-\langle n,P\rangle}{\|n\|^2}$. Für den Normalabstand erhalten wir

$$d(P, \varepsilon) = \|F - P\| = \|tn\| = |t|\|n\| = \frac{|\langle n, P\rangle - b|}{\|n\|}.$$

(b) Da $v \times w$ Normalvektor der Ebene ist haben wir

$$\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle v \times w, x\rangle = \langle v \times w, Q\rangle\}.$$

Aus (a) erhalten wir daher

$$d(P, \varepsilon) = \frac{|\langle v \times w, P - Q\rangle|}{\|v \times w\|} = \frac{|\det(v, w, P - Q)|}{\sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2}}.$$

Beachte, dass im Zähler das Volumen des Parallelepipeds mit Ecken $Q, Q + v, Q + w, P, Q + v + w, P + v, P + w, P + v + w$ steht und im Nenner der Flächeninhalt der Seite mit Ecken $Q, Q+v, Q+w, Q+v+w$; der Quotient stimmt daher mit der entsprechenden Höhe überein, d.h. mit dem Normalabstand.