Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

1. Übungsblatt für die Woche vom 4. bis 8. März 2019

Aufgabe 1.1. (a) Wiederhole die Definition eines geordneten Körpers.
(b) Gib zwei Beispiele geordneter Körper an.
(c) Erkläre, warum Quadrate in geordneten Körpern stets größer oder gleich 0 sind.
(d) Erkläre, warum in jedem geordneten Körper $-1 < 0 < 1$ gilt.
(e) Erkläre, warum auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation existiert, die $\mathbb{C}$ zu einem geordneten Körper macht.

Aufgabe 1.2. Sei K ein Körper und $P \subseteq K$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:
(i) P is abgeschlossen unter Addition, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $x + y \in P$.
(ii) P ist abgeschlossen unter Multiplikation, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $xy \in P$.
(iii) Es gilt $P \cup (-P) = K$ und $P \cap (-P) = \{0\}$, wobei $-P := \{-x : x \in P\}$.

Zeige, dass K mit der Relation

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in P$$

einen geordneten Körper bildet, $x, y \in K$.

Aufgabe 1.3. Unter einer strengen Totalordnung auf einer Menge X verstehen wir eine transitive Relation $<$ auf X, die folgende Eigenschaft (Trichotomie) besitzt. Für je zwei Elemente $x, y \in X$ tritt genau einer (und nur einer) der folgenden drei Fälle ein:

$$\text{entweder } x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } y < x.$$

(a) Sei $\leq$ eine Totalordnung auf X. Zeige, dass durch

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad x \leq y \wedge x \neq y$$

eine strenge Totalordnung auf X definiert ist.
(b) Sei $<$ eine strenge Totalordnung auf X. Zeige, dass durch

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \vee x = y$$

eine Totalordnung $\leq$ auf X definiert ist.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 1.4. Seien K und L zwei Körper. Eine Abbildung $\varphi\colon K \to L$ wird Körperhomomorphismus genannt, wenn für alle $x, y \in K$ folgende drei Gleichungen gelten:

(a) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
(b) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
(c) $\varphi(1) \neq 0$

Zeige, dass in diesem Fall für alle $x \in K$ weiters gilt:

(d) $\varphi(0) = 0$
(e) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$
(f) $\varphi(1) = 1$
(g) Ist $x \neq 0$, dann auch $\varphi(x) \neq 0$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

Aufgabe 1.5. Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Körperhomomorphismus. Zeige der Reihe nach:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = n$. Hinweis: Induktion nach n
(b) $\forall m \in \mathbb{Z} : \varphi(m) = m$
(c) $\forall q \in \mathbb{Q} : \varphi(q) = q$
(d) $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$. Hinweis: $x \geq 0 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.
(e) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \geq y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$
(f) $\forall x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = x$. Hinweis: Wären $\varphi(x)$ und x verschieden, läge eine rationale Zahl zwischen ihnen.

Die identische Abbildung ist daher der einzige Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.6. Gib einen nicht-trivialen Körperhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, d.h. einen Körperhomomorphismus, der verschieden von der identischen Abbildung ist.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 1.1. (a) Ein geordneten Körper ist ein Quadrupel $(K, +, \cdot, \leq)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.
(ii) $\leq$ ist eine Totalordnung auf K.
(iii) Die Ordnungsrelation ist mit der Addition in folgendem Sinn verträglich: $\forall x, y, z \in K : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.
(iv) Die Ordnungsrelation ist mit der Multiplikation in folgendem Sinn verträglich: $\forall x, y \in K : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$.

(b) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnungsrelation sind Beispiele geordneter Körper.

(c) Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper und $x \in K$. Es ist $0 \leq x^2$ zu zeigen. Wegen der Totalität der Ordnung genügt es zwei Fälle zu unterscheiden: $0 \leq x$ oder $x \leq 0$. Im ersten Fall erhalten wir aus der Veräglichkeit mit der Multiplikation sofort $0 \leq x^2$. Im zweiten Fall folgt aus der Verträglichkeit mit der Addition zunächst $0 \leq -x$ und dann $0 \leq (-x)^2 = x^2$ wie zuvor. In jedem Fall gilt $0 \leq x^2$.

(d) Aus (c) erhalten wir $0 \leq 1^2 = 1$. Da $0 \neq 1$ gilt sogar die strikte Ungleichheit $0 < 1$. Wegen der Verträglichkeit mit der Addition folgt daraus auch $-1 < 0$.

(e) Indirekt angenommen $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$, sodass $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ einen geordneten Körper bildet. Dann gilt $0 \leq \mathbf{i}^2 = -1 < 0$ nach (c) und (d). Da dies der Antisymmetrie widerspricht, kann es keine solche Relation $\leq$ geben.

Zu Aufgabe 1.2. Wir zeigen zunächst, dass $\leq$ eine Ordnungsrelation ist. Um die Transitivität einzusehen, seien $x, y, z \in K$ mit $x \leq y$ und $y \leq z$. Es gilt daher $y - x \in P$ und $z - y \in P$. Mit (i) erhalten wir $z - x = (z - y) + (y - x) \in P$, also $x \leq z$. Die Relation ist reflexiv, denn nach (iii) gilt $x - x = 0 \in P$. Um die Antisymmetrie einzusehen, sei $x \leq y$ und $y \leq x$. Es gilt daher $y - x \in P$ und $x - y \in P$. Somit $x - y \in P \cap (-P) = \{0\}$, siehe (iii), also $x - y = 0$ und daher $x = y$.

Wir zeigen nun, dass $\leq$ eine Totalordnung auf K bildet. Seien dazu $x, y \in K$. Nach der ersten Gleichung in (iii) muss $y - x \in P$ oder $y - x \in -P$ gelten. Im ersten Fall erhalten wir $x \leq y$; im zweiten Fall zunächst $x - y \in P$ und daher $y \leq x$.

Verträglichkeit mit der Addition ist offensichtlich, denn $(y + z) - (x + z) = y - x$. Veträglichkeit mit der Multiplikation folgt unmittelbar aus (ii).

Zu Aufgabe 1.3. (a) Wir zeigen zunächst, dass $<$ transitiv ist. Seien dazu $x, y, z \in X$, $x < y$ und $y < z$. Es gilt daher $x \leq y$ und $x \neq y$ sowie $y \leq z$ und $y \neq z$. Aus der Transitivität von $\leq$ erhalten wir $x \leq z$. Wäre $x = z$, erhielten wir aus der Antisymmetrie von $\leq$ den Widerspruch $x = y$. Also muss $x \neq z$ und daher $x < z$ gelten. Damit ist die Transitivität von $<$ gezeigt.

Um die Trichotomie zu zeigen, seien $x, y \in X$. Da $\leq$ eine Totalordung ist, gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. Ist $x \neq y$, dann folgt $x < y$ oder $y < x$. Dies zeigt, dass wenigstens einer der drei Fälle eintreten muss. Wäre $x < y$ und $y < x$, erhielten wir aus der Antisymmetrie von $\leq$ den Widerspruch $x = y$. Dies zeigt, dass sich die drei Fälle gegenseitig ausschließen.

(b) Die Relation $\leq$ ist offensichtlich reflexiv.

Um die Transitivität einzusehen, seien $x \leq y$ und $y \leq z$. Ist $x = y$ oder $y = z$ erhalten wir sofort $x \leq z$. Ist $x \neq y$ und $y \neq z$, dann $x < y$ und $y < z$, also $x < z$ wegen der Transitivität von $<$. In jedem Fall erhalten wir $x \leq z$, also ist $\leq$ transitiv.

Um die Antisymmetrie von $\leq$ einzusehen, sei $x \leq y$ und $y \leq x$. Wäre $x \neq y$, erhielten wir $x < y$ und $y < x$, was der Trichotomie von $<$ widerspricht. Also muss $x = y$ gelten und $\leq$ daher antisymmetrisch sein.

Aus der Trichotomie von $<$ folgt sofort, dass $\leq$ eine Totalordnung ist.

Zu Aufgabe 1.4. Aus (a) erhalten wir zunächst

$$\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0),$$

also $0 = \varphi(0)$. Damit folgt

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x + (-x)) = \varphi(x) + \varphi(-x),$$

also $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Aus (b) erhalten wir zunächst

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) \cdot \varphi(1),$$

also $1 = \varphi(1)$, denn $\varphi(1) \neq 0$ nach (c). Für $x \neq 0$ erhalten wir daraus

$$1 = \varphi(1) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}),$$

also $\varphi(x) \neq 0$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

Zu Aufgabe 1.5. Wir verwenden die in Aufgabe 1.4 zusammengestellten Eigenschaften von Körperhomomorphismen, ohne weiter darauf hinzuweisen.

(a) Dies folgt mittels Induktion nach n. Aus $\varphi(n) = n$ erhalten wir nämlich

$$\varphi(n + 1) = \varphi(n) + \varphi(1) = n + 1.$$

(b) Sei $m \in \mathbb{Z}$. Es existieren daher $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, sodass $m = n_2 - n_1$. Mit (a) folgt

$$\varphi(m) = \varphi(n_2 + (-n_1)) = \varphi(n_1) + \varphi(-n_2) = \varphi(n_2) - \varphi(n_1) = n_2 - n_1 = m.$$

(c) Sei $q \in \mathbb{Q}$. Es existieren daher $m, n \in \mathbb{Z}$, sodass $n \neq 0$ und $q = m \cdot n^{-1}$. Mit (b) folgt

$$\varphi(q) = \varphi(m \cdot n^{-1}) = \varphi(m) \cdot \varphi(n^{-1}) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)^{-1} = m \cdot n^{-1} = q.$$

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$. Dann existiert $y \in \mathbb{R}$ mit $x = y^2$. Wir erhalten

$$\varphi(x) = \varphi(y^2) = \varphi(y)^2 \geq 0.$$

(e) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \geq y$. Dann ist $x - y \geq 0$. Aus (d) folgt

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) \geq 0,$$

also $\varphi(x) \geq \varphi(y)$.

(f) Indirekt angenommen $x \in \mathbb{R}$ und $\varphi(x) \neq x$. Es muss daher $\varphi(x) > x$ oder $\varphi(x) < x$ gelten. Im ersten Fall existiert $q \in \mathbb{Q}$, sodass $\varphi(x) > q \geq x$. Mit (c) und (e) folgt aus der zweiten Ungleichung sofort $q = \varphi(q) \geq \varphi(x)$, was der ersten Ungleichung widerspricht. Analog führt die Annahme $\varphi(x) < x$ auf einen Widerspruch. Es muss daher $\varphi(x) = x$ gelten.

Zu Aufgabe 1.6. Die komplexe Konjugation liefert einen nicht-trivialen Körperhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$. Dies folgt aus den bekannten Relationen $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, die für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten. Beachte auch $\bar{1} = 1 \neq 0$ sowie $\bar{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$.