Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

2. Übungsblatt für die Woche vom 11. bis 15. März 2019

Aufgabe 2.1. Wiederhole die Begriffe Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasse und Quotientenmenge. Gib einige mathematische Beispiele.

Aufgabe 2.2. Sei H eine nicht leere Menge und $+\colon H \times H \to H$ eine Verknüpfung mit folgenden Eigenschaften. Für alle $a, b, c \in H$ gelte:

(i) $a + b = b + a$ (Kommutativität)
(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
(iii) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (Kürzungsregel)

Ein neutrales Element oder additive Inverse (Gruppenaxiome) werden nicht vorausgesetzt.

(a) Zeige, dass durch $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a + b' = a' + b$ auf $H \times H$ eine Äquivalenzrelation definiert ist. Bezeichne die Quotientenmenge mit $G := (H \times H)/\sim$. Für die von $(a, b) \in H \times H$ repräsentierte Äquivalenzklasse schreiben wir $[a, b]$.
(b) Zeige, dass durch $[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$ auf G eine Operation $+$ wohldefiniert ist.
(c) Zeige, dass $(G, +)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Aufgabe 2.3. In der Situation von Aufgabe 2.2 sei $c \in H$ fix. Betrachte die Abbildung

$$\iota\colon H \to G, \qquad \iota(a) := [a + c, c].$$

(a) Zeige, dass ι nicht von der Wahl von c abhängt.
(b) Zeige, dass ι ein Homomorphismus ist, d.h. $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$ für $a, b \in H$.
(c) Zeige, dass ι injektiv ist. Wir können daher H mit der Teilmenge $\iota(H) \subseteq G$ identifizieren.
(d) Zeige, dass jedes $g \in G$ von der Form $g = \iota(a) - \iota(b)$ ist, für geeignete $a, b \in H$.
(e) Zeige, dass ι bijektiv ist, wenn wir mit einer Gruppe H beginnen. In diesem Fall liefert die Konstruktion also nichts Neues.

Aufgabe 2.4. In der Situation von Aufgabe 2.2 setzen wir weiters voraus:

(iv) Sind $a, b \in H$, dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein: Entweder existiert $x \in H$ mit $a + x = b$; oder $a = b$; oder es existiert $x \in H$ mit $a = b + x$.

Zeige, dass in dieser Situation folgendes gilt:

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(a) $\iota(a) \neq 0$, für alle $a \in H$.
(b) $\iota(a) \neq -\iota(b)$ für alle $a, b \in H$.
(c) Zu jedem $g \in G \setminus \{0\}$ existiert $a \in H$ mit $g = \iota(a)$ oder $g = -\iota(a)$.

Identifizieren wir H via ι mit der Teilmenge $\iota(H) \subseteq G$, dann gilt also

$$G \setminus \{0\} = (-H) \cup H \qquad \text{und} \qquad (-H) \cap H = \emptyset,$$

wobei $-H = \{-a : a \in H\}$.

Aufgabe 2.5. In der Situation von Aufgabe 2.2 nehmen wir weiters an, dass auf H eine kommutative und assoziative Multiplikation definiert ist, für die das Distributivgesetz gilt, d.h. für beliebige $a, b, c \in H$ gelte:

$$ab = ba, \qquad a(bc) = (ab)c, \qquad \text{und} \qquad a(b + c) = ab + ac.$$

(a) Zeige, dass durch $[a, b] \cdot [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$ auf G eine Operation wohldefiniert ist.
(b) Zeige, dass $(G, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 2.6. In der Situation von Aufgabe 2.5 zeige weiters:

(a) Zeige $\iota(a) \cdot [c, d] = [ac, ad]$ für beliebige $a, c, d \in H$.
(b) Zeige $\iota(ac) = \iota(a)\iota(c)$ für $a, c \in H$.
(c) Zeige, dass der Ring G ein Einselement besitzt, wenn für die Multiplikation in H ein neutrales Element existiert.

Aufgabe 2.7. Wenden wir obige Konstruktion auf $H = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ an, erhalten wir $G = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition, vgl. Einführung in die Mathematik. Wir wollen hier eine direktere (aber weniger elegante) Konstruktion von $\mathbb{Z}$ skizzieren. Dazu fixieren wir $o \notin \mathbb{N}$ und zu jedem $a \in \mathbb{N}$ ein $a' \notin \{o\} \cup \mathbb{N}$ so, dass $a' \neq b'$ für alle $a \neq b$ gilt. Wir betrachten nun

$$Z := \{a' : a \in \mathbb{N}\} \cup \{o\} \cup \mathbb{N} = \{\dots, 3', 2', 1', o, 1, 2, 3, \dots\}$$

und dehnen die Addition von $\mathbb{N}$ zu einer Verknüpfung $+\colon Z \times Z \to Z$ wie folgt aus. Für $g \in Z$ sei $g + o := g$ und $o + g := g$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$a' + b' := (a + b)'$$

$$a' + b := \begin{cases} x & \text{falls } a + x = b \text{ für ein } x \in \mathbb{N}, \\ o & \text{falls } a = b, \text{ und} \\ x' & \text{falls } a = b + x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$a + b' := \begin{cases} x' & \text{falls } a + x = b \text{ für ein } x \in \mathbb{N}, \\ o & \text{falls } a = b, \text{ und} \\ x & \text{falls } a = b + x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeige, dass $(Z, +)$ eine abelsche Gruppe bildet. Da der Beweis des Assoziativgesetzes eine unangenehme Fallunterscheidung erfordert, überprüfe diesbezüglich nur

$$a' + (b + c) = (a' + b) + c,$$

für $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.8. In der Situation von Aufgabe 2.7 dehnen wir nun auch die Multiplikation von $\mathbb{N}$ zu einer Verknüpfung $\cdot\colon Z \times Z \to Z$ wie folgt aus. Für $g \in Z$ sei $og := o$ und $go := o$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a'b := (ab)', \qquad ab' := (ab)' \qquad \text{und} \qquad a'b' := (ab)'.$$

Zeige, dass $(Z, +, \cdot)$ einen kommutativen Ring mit Eins bildet. Da der Beweis der Assoziativ- und Distributivgesetze umfangreiche Fallunterscheidungen erfordert, überprüfe diesbezüglich nur

$$(a'b)c = a'(bc) \qquad \text{und} \qquad (a' + b)c = a'c + bc,$$

für $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 2.1. vgl. Vorlesung Einführung in die Mathematik

Zu Aufgabe 2.2. a) Die Relation ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch. Um die Transitivität einzusehen, sei $(a, b) \sim (a', b')$ und $(a', b') \sim (a'', b'')$. Es gilt daher $a+b' = a'+b$ und $a' + b'' = a'' + b'$. Addition der beiden Gleichungen führt auf

$$a + b'' + (a' + b') = a'' + b + (a' + b').$$

Mit der Kürzungsregel folgt $a + b'' = a'' + b$, also $(a, b) \sim (a'', b'')$.

b) Seien $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$. Es gilt daher $a+b' = a'+b$ und $c+d' = c'+d$. Addition der beiden Gleichung führt auf

$$(a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d).$$

Somit $(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$, also $[a + c, b + d] = [a' + c', b' + d']$.

c) Kommutativität der Addition auf G folgt sofort aus der Kommutativität auf H:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] = [c + a, d + b] = [c, d] + [a, b].$$

Assoziativität der Addition auf G folgt ebenso aus der Assoziativität auf H:

$$\begin{aligned}([a, b] + [c, d]) + [e, f] &= [a + c, b + d] + [e, f] = [(a + c) + e, (b + d) + f]\\ &= [a + (c + e), b + (d + f)] = [a, b] + [c + e, d + f] = [a, b] + ([c, d] + [e, f]).\end{aligned}$$

Für beliebige $a, b, c \in H$ gilt $[a, b]+[c, c] = [a+c, b+c] = [a, b]$, denn $(a+c)+b = a+(b+c)$. Somit ist $0 := [c, c]$ neutrales Element der Addition. Beachte $[c, c] = [c', c']$ für beliebige $c, c' \in H$, denn $c + c' = c' + c$. Schließlich gilt $[a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [a + b, a + b] = 0$, also ist $[b, a]$ das additive Inverse von $[a, b]$, d.h. $-[a, b] = [b, a]$.

Zu Aufgabe 2.3. a) Es gilt $[a + c, c] = [a + c', c']$, denn $(a + c) + c' = (a + c') + c$.

b) Es gilt

$$\iota(a) + \iota(b) = [a + c, c] + [b + c, c] = [a + b + (c + c), (c + c)] = \iota(a + b).$$

c) Ist $\iota(a) = \iota(b)$, dann gilt $[a + c, c] = [b + c, c]$, also $a + (c + c) = b + (c + c)$ und mit der Kürzungsregel folgt $a = b$.

d) Es gilt

$$\begin{aligned}\iota(a) - \iota(b) = [a + c, c] - [b + c, c] &= [a + c, c] + [c, b + c]\\ &= [a + (c + c), b + (c + c)] = [a, b]\end{aligned}$$

e) Ist H eine Gruppe, dann ist ι wegen (b) ein Gruppenhomomorphismus und daher $\iota(a) - \iota(b) = \iota(a-b)$ für alle $a, b \in H$. Zusammen mit (d) zeigt dies, dass ι surjektiv ist. Wegen (c) ist ι auch injektiv, also bijektiv.

Zu Aufgabe 2.4. a) Ist $\iota(a) = 0$, dann gilt $[a+c, c] = [c, c]$, also $a + (c+c) = c+c$, was der Eindeutigkeitsaussage in Voraussetzung (iv) widerspricht. Also muss $\iota(a) \neq 0$ gelten.

b) Ist $\iota(a) = -\iota(b)$, dann gilt $[a+c, c] = [c, b+c]$, also $(a+b) + (c+c) = c+c$, was der Eindeutigkeitsaussage in Voraussetzung (iv) widerspricht. Also muss $\iota(a) \neq -\iota(b)$ gelten.

c) Sei $g = [a, b]$. Da $g \neq 0$ muss $a \neq b$ gelten. Nach Voraussetzung (iv) existiert daher $x \in H$, sodass $a + x = b$ oder $a = b + x$. Im ersten Fall erhalten wir $g = [a, b] = [a, a+x] = -[a+x, a] = -\iota(x)$. Im zweiten Fall erhalten wir $g = [a, b] = [b+x, b] = \iota(x)$.

Zu Aufgabe 2.5. a) Seien $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$. Es gilt daher

$$a + b' = a' + b \qquad \text{und} \qquad c + d' = c' + d.$$

Somit auch:

$$\begin{aligned} ac + b'c &= a'c + bc & \qquad a'c + a'd' &= a'c' + a'd \\ a'd + bd &= ad + b'd & \qquad b'c' + b'd &= b'c + b'd' \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen in jeder Spalte und Umsortieren der Summanden führt auf:

$$\begin{aligned} (ac + bd) + (a'd + b'c) &= (a'c + b'd) + (ad + bc), \\ (a'c + b'd) + (a'd' + b'c') &= (a'c' + b'd') + (a'd + b'c), \end{aligned}$$

Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} [ac + bd, ad + bc] &= [a'c + b'd, a'd + b'c] \\ [a'c + b'd, a'd + b'c] &= [a'c' + b'd', a'd' + b'c'] \end{aligned}$$

Kombination der beiden Gleichngen liefert

$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c'],$$

also ist die Multiplikation wohldefiniert.

b) Die Kommutativität der Multiplikation auf G folgt aus der Kommutativität der Multiplikation auf H, denn

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac + bd, ad + bc] = [ca + db, cb + da] = [c, d] \cdot [a, b].$$

Die Multiplikation auf G is assoziativ, denn

$$\begin{aligned} \big([a, b] \cdot [c, d]\big) \cdot [e, f] &= [ac + bd, ad + bc] \cdot [e, f] \\ &= [(ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [a, b] \cdot \big([c, d] \cdot [e, f]\big) &= [a, b] \cdot [ce + df, cf + de] \\ &= [a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df)] \end{aligned}$$

stimmen wegen des Assoziativ- und Distributivgesetzes in H überein.

Die Multiplikation auf G is distributiv, denn

$$[a, b] \cdot \big([c, d] + [e, f]\big) = [a, b] \cdot [c + e, d + f] = [a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e)]$$

und

$$[a,b]\cdot[c,d]+[a,b]\cdot[e,f] = [ac+bd, ad+bc]+[ae+bf, af+be]$$
$$= [ac+bd+ae+bf, ad+bc+af+be]$$

wegen des Distributivgesetzes in H überein.

Zu Aufgabe 2.6. a) Es gilt:

$$\iota(a)\cdot[c,d] = [a+b,b]\cdot[c,d] = [(a+b)c+bd,(a+b)d+bc] = [ac+(bc+bd), ad+(bc+bd)] = [ac,ad].$$

b) Mit (a) folgt:

$$\iota(a)\cdot\iota(c) = \iota(a)\cdot[c+d,d] = [a(c+d),ad] = [ac+ad,ad] = \iota(ac).$$

c) Ist 1 multiplikatives neutrales Element in H, dann ist $\iota(1)$ Einselement in G, siehe (a).

Zu Aufgabe 2.7. Die Verknüpfung $+\colon Z\times Z\to Z$ ist wohldefiniert, da für $a,b\in\mathbb{N}$ stets genau einer der folgenden drei Fälle eintritt: Entweder existiert $x\in\mathbb{N}$ mit $a+x=b$; oder $a=b$; oder es existiert $x\in\mathbb{N}$ mit $a=b+x$. Darüber hinaus ist x im ersten und dritten Fall eindeutig.

Offensichtlich ist o neutrales Element der Addition auf Z. Für $a\in\mathbb{N}$ gilt nach Definition $a'+a=o=a'+a$, d.h. a' ist Inverses von a und umgekehrt. Da auch $o+o=o$, besitzt jedes Element von Z ein additives Inverses. Die Addition auf Z ist offensichtlich kommutativ.

Um $a'+(b+c)=(a'+b)+c$ zu überprüfen, unterscheiden wir folgende Fälle:

(1) Ist $a+x=b$ für ein $x\in\mathbb{N}$, dann gilt auch $a+(x+c)=b+c$ und wir erhalten

$$a'+(b+c)=x+c=(a'+b)+c.$$

(2) Ist $a=b$, dann gilt auch $a+c=b+c$ und wir erhalten

$$a'+(b+c)=c=o+c=(a'+b)+c.$$

(3) Ist $a=b+x$ für ein $x\in\mathbb{N}$, unterscheiden wir drei Unterfälle:

(a) Ist $a+y=b+c$ für ein $y\in\mathbb{N}$, dann gilt auch $x+y=c$ und wir erhalten

$$a'+(b+c)=y=x'+c=(a'+b)+c.$$

(b) Ist $a=b+c$, dann gilt auch $x=c$ und wir erhalten

$$a'+(b+c)=o=x'+c=(a'+b)+c.$$

(c) Ist $a=(b+c)+y$ für ein $y\in\mathbb{N}$, dann gilt auch $x=c+y$ und wir erhalten

$$a'+(b+c)=y'=x'+c=(a'+b)+c.$$

In jedem Fall gilt also $a'+(b+c)=(a'+b)+c$.

Zu Aufgabe 2.8. Die Kommutativität der Multiplikation folgt sofort aus der Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{N}$. Etwa gilt

$$a'b=(ab)'=(ba)'=ba' \qquad \text{und} \qquad a'b'=ab=ba=b'a'$$

für $a,b\in\mathbb{N}$. Offensichtlich ist 1 neutrales Element bezüglich der Multiplikation. Weiters

$$(a'b)c=(ab)'c=((ab)c)'=(a(bc))'=a'(bc).$$

Um $(a'+b)c=a'c+bc$ zu überprüfen, unterscheiden wir drei Fälle:

(1) Ist $a+x=b$ für ein $x \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen des Distributivgesetzes in $\mathbb{N}$ auch $ac+xc=bc$ und wir erhalten

$$(a'+b)c = xc = (ac)' + bc = a'c + bc.$$

(2) Ist $a=b$ dann gilt auch $ac=bc$ und wir erhalten

$$(a'+b)c = oc = o = (ac)' + bc = a'c + bc.$$

(3) Ist $a=b+x$ für ein $x \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen des Distributivgesetzes in $\mathbb{N}$ auch $ac=bc+xc$ und wir erhalten

$$(a'+b)c = x'c = (xc)' = (ac)' + bc = a'c + bc.$$

In allen Fällen haben wir $(a'+b)c = a'c + bc$.