

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller
Sommersemester 2019 (UE250163)

3. Übungsblatt für die Woche vom 18. bis 22. März 2019

AUFGABE 3.1. Leite aus den Inzidenzaxiomen I1 bis I3 folgende Eigenschaften ab:

- (a) Durch jeden Punkt gehen wenigstens zwei verschiedene Geraden.
- (b) Es existieren drei nicht konkurrente Geraden.
- (c) Zu jedem Punkt existiert eine Gerade, die diesen Punkt nicht enthält.
- (d) Zu jeder Geraden existiert ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt.

AUFGABE 3.2. Zeige, dass das Innere einer Strecke stets unendlich viele Punkte enthält.

AUFGABE 3.3. Zeige, dass durch jeden Punkt unendlich viele Geraden laufen.

AUFGABE 3.4. (a) Zeige, dass das Innere einer Strecke konvex ist.

- (b) Zeige, dass offene Halbgeraden konvex sind.
- (c) Zeige, dass offene Halbebenen konvex sind.

AUFGABE 3.5. (a) Zeige, dass $[AB]$ konvex ist, für je zwei Punkte A und B .

- (b) Zeige, dass abgeschlossene Halbgeraden konvex sind.
- (c) Schlage eine Definition abgeschlossener Halbebenen analog zur Definition abgeschlossener Halbstrahlen vor und zeige, dass abgeschlossene Halbebenen konvex sind.

AUFGABE 3.6. (a) Zeige, dass Durchschnitte konvexer Mengen konvex sind.

- (b) Zeige, dass das Innere eines Winkels konvex ist.
- (c) Zeige, dass das Innere eines Dreiecks konvex ist.
- (d) Schlage eine Definition abgeschlossener Dreiecke vor (Inneres und "Rand") und zeige, dass abgeschlossene Dreiecke konvex sind.

AUFGABE 3.7. Seien $A \neq B$ und $C \neq D$ vier Punkte, sodass $(AB) = (CD)$. Zeige, dass in dieser Situation schon $\{A, B\} = \{C, D\}$ gelten muss, d.h. entweder $A = C$ und $B = D$ oder $A = D$ und $B = C$. Hinweis: Zeige, dass keiner der drei Fälle $A * C * B$, $A * B * C$, $C * A * B$ eintreten kann und schließe daraus $C = A$ oder $C = B$.

AUFGABE 3.8. Sei ABC ein Dreieck. Weiters seien B' und C' zwei Punkte mit $A * B * B'$ und $A * C * C'$. Zeige, dass sich die Strecken (BC') und $(B'C)$ im Inneren des Winkels $\angle CAB$ treffen. Hinweis: Wende, wie in der Vorlesung, Axiom A4 an.

Beispiele unter <http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html>

Lösungshinweise

ZU AUFGABE 3.1. (a) Sei X ein Punkt. Nach Axiom I3 existieren drei verschiedene Punkte A, B, C , die nicht auf einer Geraden liegen. Wir nehmen zunächst an, dass diese drei Punkte alle verschieden von X sind. Da A, B, C nicht kollinear sind, können die Geraden $g(X, A), g(X, B), g(X, C)$ nicht alle übereinstimmen. Also gibt es wenigstens zwei verschiedene Geraden durch X . Stimmt einer der drei Punkte A, B, C mit X überein, nehmen wir o.B.d.A. $X = A$ an und sehen, dass die Geraden $g(X, B)$ und $g(X, C)$ verschieden sind.

(b) Nach Axiom I3 existieren drei verschiedene Punkte A, B, C , die nicht auf einer Geraden liegen. Zusammen mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom I1 folgt $g(A, B) \cap g(B, C) = \{B\}$ und analog für zyklische Vertauschung von A, B und C . Da die drei Punkte verschieden sind folgt $g(A, B) \cap g(B, C) \cap g(C, A) = \emptyset$.

(c) folgt aus (b).

(d) folgt sofort aus Axiom I3 und wurde nur aus Dualitätsgründen aufgenommen.

ZU AUFGABE 3.2. Seien A und B zwei verschiedene Punkte. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Innere einer Strecke stets nicht leer ist. Rekursiv können daher Punkte $A_1 \in (AB)$ und $A_{n+1} \in (A_n B)$ gewählt werden, $n \in \mathbb{N}$. Mittels Induktion nach m folgt $A_m \in (A_n B) \subseteq (AB)$, und daher insbesondere $A_m \neq A_n$, für alle $m > n$. Also sind A_1, A_2, \dots paarweise verschiedene Punkte in (AB) . Dabei geht folgende aus der Vorlesung bekannte Tatsache ein: Ist $D \in (CE)$, dann auch $(CD) \subseteq (CE) \supseteq (DE)$.

ZU AUFGABE 3.3. Sei A ein Punkt und g eine Gerade, die A nicht enthält. Nach der vorangehenden Aufgabe existieren auf g unendlich viele paarweise verschiedene Punkte B_1, B_2, \dots . Für $i \neq j$ sind die Geraden $g(A, B_i)$ und $g(A, B_j)$ verschieden, denn A liegt nicht auf $g(B_i, B_j) = g$. Somit sind $g(A, B_i)$, $i \in \mathbb{N}$, unendlich viele paarweise verschiedene Geraden durch A .

ZU AUFGABE 3.4. (a) Seien $X, Y \in (AB)$. Es genügt $(XY) \subseteq (AB)$ zu zeigen. O.B.d.A. sei $X \neq Y$. Aus der Vorlesung ist $(AB) \setminus \{X\} = (AX) \cup (XB)$ bekannt, also muss Y in (AX) oder (XB) liegen. O.B.d.A. sei $Y \in (XB)$. Es folgt $(XY) \subseteq (XB) \subseteq (AB)$.

(b) Sei h eine Halbgerade mit Ausgangspunkt O und Trägergeraden k . Weiters seien $X, Y \in h$. Es genügt $(XY) \subseteq h$ zu zeigen. Sei dazu $Z \in (XY)$. Da X und Y auf der selben Seite von O in k liegen, gilt $O \notin (XY)$ und insbesondere $Z \in k \setminus \{O\}$. Wegen $(XZ) \subseteq (XY)$ gilt also auch $O \notin (XZ)$. Somit liegen X und Z auf der selben Seite von O in k , also $Z \in h$.

(c) Sei g eine Gerade und ε eine Seite von g . Weiters seien $X, Y \in \varepsilon$. Es genügt $(XY) \subseteq \varepsilon$ zu zeigen. Sei dazu $Z \in (XY)$. Da X und Y auf der selben Seite von g liegen trifft (XY) die Gerade g nicht. Insbesondere liegt Z nicht auf g . Wegen $(XZ) \subseteq (XY)$ kann also auch (XZ) die Gerade g nicht treffen. Daher liegen X und Z auf der selben Seite von g , also $Z \in \varepsilon$.

ZU AUFGABE 3.5. (a) Seien $X, Y \in [AB]$. Es genügt $(XY) \subseteq [AB]$ zu zeigen. Liegen X und Y beide in (AB) , so folgt dies unmittelbar aus Aufgabe 3.4(a). Stimmen X und Y beide mit A oder B überein, ist die Aussage trivial. O.B.d.A. genügt es daher den Fall $X = A$ und $Y \in (AB)$ zu betrachten. In diesem Fall haben wir $(XY) = (AY) \subseteq (AB) \subseteq [AB]$.

(b) Seien $A \neq B$ und betrachte die abgeschlossene Halbgerade $\bar{h} = [AB>$. Weiters seien $X, Y \in \bar{h}$. Es genügt $(XY) \subseteq \bar{h}$ zu zeigen. Liegen X und Y beide in h folgt dies unmittelbar aus Aufgabe 3.4(b). Stimmen X und Y beide mit A überein ist die Aussage trivial. O.B.d.A. genügt es daher den Fall $X = A$ und $Y \in h$ zu betrachten. Dieser Fall ist aber durch die Bemerkung 1.2.23 aus der Vorlesung abgedeckt.

(c) Unter einer abgeschlossenen Halbebene verstehen wir jede Menge der Form $\bar{\varepsilon} = g \cup \varepsilon$ wobei ε eine Seite einer Geraden g bezeichnet. Seien $X, Y \in \bar{\varepsilon}$. Es genügt $(XY) \subseteq \bar{\varepsilon}$ zu zeigen. Liegen X und Y beide in ε , so folgt dies unmittelbar aus Aufgabe 3.4(c). Liegen X und Y beide in g , so folgt dies aus $(XY) \subseteq g \subseteq \bar{\varepsilon}$. O.B.d.A. genügt es daher den Fall $X \in g$ und $Y \in \varepsilon$ zu betrachten. Dieser Fall ist aber durch die Bemerkung 1.2.25 aus der Vorlesung abgedeckt.

ZU AUFGABE 3.6. (a) Seien K_1 und K_2 zwei konvexe Mengen und $X, Y \in K_1 \cap K_2$. Insbesondere liegen X und Y in K_1 , also $[XY] \subseteq K_1$ aufgrund der Konvexität von K_1 . Analog folgt $[XY] \subseteq K_2$. Wir erhalten $[XY] \subseteq K_1 \cap K_2$, also ist $K_1 \cap K_2$ konvex. Das selbe Argument zeigt, dass beliebige Durchschnitte konvexer Mengen konvex sind, d.h. sind K_i konvexe Mengen, $i \in I$, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} K_i$ konvex.

(b) Das Innere eines Winkels wurde als Durchschnitt zweier offener Halbebenen definiert. Da Halbebenen konvex sind folgt (b) aus (a).

(c) lässt sich analog zu (b) zeigen, denn das Innere eines Dreiecks wurde als Durchschnitt dreier offener Halbebenen definiert.

(d) Sei ABC ein Dreieck. Bezeichne ε_A die Seite von $g(B, C)$, die A enthält und $\bar{\varepsilon}_A = g(B, C) \cup \varepsilon_A$ die entsprechende abgeschlossene Halbebene. Analog seien die abgeschlossenen Halbebenen $\bar{\varepsilon}_B$ und $\bar{\varepsilon}_C$ definiert. Unter dem Abschluss des Dreiecks ABC verstehen wir die Menge $\bar{\varepsilon}_A \cap \bar{\varepsilon}_B \cap \bar{\varepsilon}_C$. Als Durchschnitt konvexer Mengen ist dies konvex.

ZU AUFGABE 3.7. Da das Innere einer Strecke wenigstens zwei Punkte enthält, müssen die Punkte A, B, C und D auf einer Geraden g liegen.

$A * C * B$ ist nicht möglich, denn in dieser Situation haben wir $C \in (AB)$ aber $C \notin (CD)$, was $(AB) = (CD)$ widerspricht. Analog ist auch $D * B * C$ nicht möglich, es muss daher $D \in [BC >$ gelten.

$A * B * C$ ist nicht möglich, denn in dieser Situation erhielten wir den Widerspruch

$$(AB) \cap (CD) \subseteq <AB) \cap [BC > = \emptyset.$$

Dabei haben wir die aus der Vorlesung bekannte Tatsache $(AB) \subseteq <AB)$ verwendet und auch die Konvexität der Halbstrahlen, aus der wir $(CD) \subseteq [BC >$ erhalten.

Durch Vertauschen der Rollen von A und B sehen wir, dass auch $C * A * B$ nicht eintreten kann. Nach Axiom A3 bleiben daher nur die beiden Möglichkeiten $C = A$ oder $C = B$. Analog folgt $D = A$ oder $D = B$ und somit $\{A, B\} = \{C, D\}$.

ZU AUFGABE 3.8. Axiom A4 auf das Dreieck ABC' und die Gerade $g(B', C)$ angewandt liefert $g(B', C) \cap (BC') \neq \emptyset$. Axiom A4 auf das Dreieck $AB'C$ und die Gerade $g(B, C')$ angewandt liefert $g(B, C') \cap (B'C) \neq \emptyset$. Da $g(B', C)$ und $g(B, C')$ verschieden sind schneiden sie sich also in genau einem Punkt, der in $(BC') \cap (B'C)$ liegen muss. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass beide Strecken, und damit auch ihr Schnittpunkt, im Inneren des Winkels $\angle CAB$ liegen.