Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

4. Übungsblatt für die Woche vom 25. bis 29. März 2019

Aufgabe 4.1. Sei ABC ein Dreieck. Weiters seien B' und C' zwei Punkte mit $A * B * B'$ und $A * C * C'$. Zeige, dass sich die Strecken $[BC]$ und $[B'C']$ nicht schneiden. Hinweis: Verwende Axiom A4 oder Proposition 1.2.9.

Aufgabe 4.2. Seien AB und CD zwei Strecken. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
(a) Es existiert $X \in (CD)$ mit $AB \equiv CX$.
(b) Es gilt $|AB| < |CD|$, d.h. es existiert $c \in \mathcal{P}$ mit $|AB| + c = |CD|$.
Dabei bezeichnet $\mathcal{P}$, wie in der Vorlesung, die Menge der Kongruenzklassen von Strecken (positive Streckenlängen).

Aufgabe 4.3. Sei X ein Punkt im Inneren eines Winkels $\angle AOB$. Zeige, dass dann der gesamte Halbstrahl $(OX\!>$ im Inneren dieses Winkels liegt.

Aufgabe 4.4. Seien h, k, l, r vier, vom selben Punkt ausgehende Halbstrahlen mit folgenden beiden Eigenschaften:
(a) h und l bilden einen Winkel und k liegt im Inneren von $\angle(h, l)$.
(b) h und r bilden einen Winkel und l liegt im Inneren von $\angle(h, r)$.
Zeige, dass dann auch folgende beiden Aussagen zutreffen:
(c) k und r bilden einen Winkel und l liegt im Inneren von $\angle(k, r)$.
(d) k liegt im Inneren von $\angle(h, r)$.
Hinweis: Zeige, dass eine Gerade existiert, die alle vier Halbstrahlen schneidet und wende Lemma 1.2.26 auf die Schnittpukte an.

Aufgabe 4.5 (Konvexe Vierecke). Seien A, B, C, D vier Punkte, sodass sich die Strecken (AC) und (BD) in genau einem Punkt schneiden.
(a) Zeige, dass $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ und $\angle CDA$ Winkel bilden.
(b) Bezeichne V den Durchschnitt der Inneren dieser vier Winkel. Zeige, dass V konvex ist.
(c) Zeige, dass die Diagnalen (AC) und (BD) in V liegen.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 4.6 (Konvexe Vierecke). Seien A, B, C, D vier Punkte, sodass $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ Winkel bilden. Bezeichne V den Durchschnitt der Inneren dieser vier Winkel.

(a) Skizziere eine Situation, in der $(AC) \cap (BD) = \emptyset$ und $V = \emptyset$ gilt.
(b) Sei nun $V \neq \emptyset$. Zeige, dass sich (AC) und (BD) in genau einem Punkt treffen.

Aufgabe 4.7. Bezeichne $\mathcal{K}$, wie in der Vorlesung, die abelsche Gruppe, die wir aus den Kongruenzklassen von Strecken durch Hinzunehmen der additiven Inversen gewonnen haben. Zeige:

(a) Für $a, b \in \mathcal{K}$ gilt: $2a = 2b \Rightarrow a = b$.
(b) Für $a, b \in \mathcal{K}$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $na = nb \Rightarrow a = b$.

Dabei verwenden wir die Abkürzungen $2a := a + a$ und $na := a + \cdots + a$, wobei die zweite Summe aus n Summanden besteht. Hinweis: An dieser Stelle ist noch unklar, ob in $\mathcal{K}$ durch 2 oder n dividiert werden kann. Verwende stattdessen die Ordnungsrelation.

Aufgabe 4.8. Sei A eine abelsche Gruppe. Für $a \in A$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ bezeichne $na := a + \cdots + a$ und $(-n)a := -(a + \cdots + a)$, wobei beide Summen aus genau n Summanden bestehen. Insbesondere ist $1a = a$ und $(-1)a = -a$. Weiters sei $0a := 0$. Damit ist na für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ und jedes $a \in A$ definiert.

(a) Zeige, dass die Gleichung $n(a + b) = na + nb$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in A$ gilt.
(b) Zeige, dass die Gleichung $(n + m)a = na + ma$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$ gilt.
(c) Gib eine abelsche Gruppe A und $a, b \in A$ an, für die $a \neq b$ aber $2a = 2b$ gilt.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 4.1. Bezeichne g die Gerade durch B' und C'. Es gilt $g \cap [AB] = \emptyset$, denn $g \cap g(A, B) = \{B'\}$, aber $B' \notin [AB]$ da $A * B * B'$, vgl. Axiom A3. Ebenso gilt $g \cap [AC] = \emptyset$. Mit Axiom A4 erhalten wir auch $g \cap [BC] = \emptyset$. Da $[B'C'] \subseteq g$, folgt $[B'C'] \cap [BC] = \emptyset$. Alternativ lässt sich dies auch aus Proposition 1.2.9, angewandt auf die Gerade $g(B, C)$ und das Dreieck $AB'C'$, ableiten.

Zu Aufgabe 4.2. Für die eine Implikation sei zunächst $X \in (CD)$ und $AB \equiv CX$. Es gilt daher $C * X * D$ und $|AB| = |CX|$. Direkt aus der Definition der Addition erhalten wir $|CD| = |CX| + |XD| = |AB| + |XD|$, also $|AB| < |CD|$, denn $|XD| \in \mathcal{P}$.

Für die umgekehrte Implikation sei nun $|AB| < |CD|$. Nach Axiom K2 existiert auf der Seite von C in $g(C, D)$, die D enthält, ein (eindeutiger) Punkt X mit $CX \equiv AB$. Da D und X auf der selben Seite von C liegen, muss nach Axiom A3 einer der folgenden Fälle eintreten: $C * X * D$, oder $X = D$ oder $C * D * X$. Wäre $X = D$, erhielten wir $|AB| = |CX| = |CD|$, was $|AB| < |CD|$ widerspricht. Wäre $C * D * X$, erhielten wir aus dem bereits Gezeigten $|CD| < |CX| = |AB|$, was ebenfalls $|AB| < |CD|$ widerspricht. Somit bleibt nur der Fall $C * X * D$, also $X \in (CD)$.

Zu Aufgabe 4.3. Da X und B auf der selben Seite von $g(O, A)$ liegen, liegt ganz $(OX>$ auf dieser Seite von $g(O, A)$, siehe Bemerkung 1.2.24. Da X und A auf der selben Seite von $g(O, B)$ liegen, liegt auch $(OX>$ auf dieser Seite von $g(O, B)$. Damit liegt $(OX>$ im Durchschnitt dieser beiden Halbebenen, d.h. im Inneren des Winkels $\angle AOB$.

Zu Aufgabe 4.4. Wähle $A \in r$ und $D \in h$. Da l im Inneren von $\angle(h, r)$ liegt, schneidet (AD) den Strahl l in einem Punkt B, siehe Proposition 1.2.36. Da k im Inneren von $\angle(h, l)$

liegt, schneidet (BD) den Strahl k in einem Punkt C. Nach Konstruktion gilt $A*B*D$ und $B*C*D$. Mit Lemma 1.2.26(b) folgt $A*B*C$ und $A*C*D$. Lägen k und r in einer Geraden, dann müsste auch B und damit ganz l in dieser Geraden liegen, aber dies widerspricht der Voraussetzung, dass k im Inneren von $\angle(h,l)$ liegt. Somit bilden k und r einen Winkel. Nach Bemerkung 1.2.35 liegt (AC) im Inneren des Winkels $\angle(k,r)$. Da $B \in (AC)$ folgt, dass B und damit ganz l im Inneren von $\angle(k,r)$ liegt, vgl. Aufgabe 4.3. Analog sehen wir, dass auch $C \in (AD)$, und damit der gesamte Halbstrahl k, im Inneren von $\angle(h,r)$ liegt.

Zu Aufgabe 4.5. Nach Voraussetzung ist (AC) nicht leer, also $A \neq C$. Um zu zeigen, dass $\angle ABC$ einen Winkel bildet, nehmen wir indirekt $B \in g(A,C)$ an. Läge D nicht auf $g(A,C)$, dann läge (BD) zur Gänze auf einer Seite dieser Geraden, siehe Bemerkung 1.2.25, und wir erhielten den Widerspruch $(AC)\cap(BD)=\emptyset$. Also muss auch D auf $g(A,C)$ liegen. Eine einfache Fallunterscheidung zeigt, dass der Durchschnitt $(AC)\cap(BD)$ leer ist oder aus dem Inneren einer Strecke, also mindestens zwei Punkten besteht. In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass dieser Durchschnitt aus genau einem Punkt besteht. Somit kann B nicht auf $g(A,C)$ liegen, also bildet $\angle ABC$ einen Winkel. Analog folgt, dass auch $\angle BCD$, $\angle CDA$ und $\angle DAB$ Winkel bilden.

(b) Als Durchschnitt konver Mengen ist V konvex.

(c) Nach Bemerkung 1.2.35 liegt (AC) im Inneren der Winkel $\angle ABC$ und $\angle CDA$. Ebenso liegt (BD) im Inneren der Winkel $\angle BCD$ und $\angle DAB$. Bezeichnet X den Schnittpunkt von (AC) und (BD), dann liegt X also im Inneren aller vier Winkel. Nach Aufgabe 4.3 liegt daher $(AC>$ im Inneren des Winkels $\angle DAB$ und $<AC)$ liegt im Inneren von $\angle BCD$. Damit liegt $(AC) = {<AC)} \cap (AC>$ im Inneren aller vier Winkel, also $(AC)\subseteq V$. Analog folgt $(BD)\subseteq V$.

Zu Aufgabe 4.6. (a) Es genügt, A und D so auf verschiedenen Seiten von $g(B,C)$ zu wählen, dass weder B noch C auf $g(A,D)$ liegt.

(b) Da sich die Inneren von $\angle DAB$ und $\angle ABC$ schneiden, müssen C und D auf der selben Seite von $g(A,B)$ liegen. Ebenso, liegen D und A auf der selben Seite von $g(B,C)$. Somit liegt D im Inneren des Winkels $\angle ABC$. Also liegt auch der Halbstrahl $(BD>$ im Inneren von $\angle ABC$, vgl. Aufgabe 4.3. Nach Proposition 1.2.36, schneiden sich (AC) und $(BD>$ in einem Punkt X. Analog, trifft (AC) auch den Halbstrahl $<BD)$. Dieser Schnittpunkt muss mit X übereinstimmen, denn die Geraden $g(A,C)$ und $g(B,D)$ sind verschieden. Wir erhalten $X \in {<BD)} \cap (BD> = (BD)$, also $(AC)\cap(BD)=\{X\}$.

Zu Aufgabe 4.7. (a) Sei $2a=2b$. Wir nehmen indirekt $a\neq b$ an. O.B.d.A. sei $a<b$. Mit Korollar 1.3.10 folgt $a+a<a+b<b+b$, also $2a<2b$. Da dies der Voraussetzung $2a=2b$ widerspricht, muss also $a=b$ gelten.

(b) Sei $na=nb$. Wie in (a) nehmen wir indirekt $a\neq b$ und o.B.d.A. $a<b$ an. Mittels Induktion nach n lässt sich $na<nb$ zeigen. Für den Beweis des Induktionsschritts beachte, dass wir aus $na<nb$ mit Korollar 1.3.10 auch $(n+1)a=na+a<nb+a<nb+b=(n+1)b$ erhalten. Da $na<nb$ der Voraussetzung $na=nb$ widerspricht, muss also $a=b$ gelten.

Zu Aufgabe 4.8. (a) Für $n\geq 1$ erhalten wir:

$$n(a+b)=\underbrace{(a+b)+\cdots+(a+b)}_{n\text{ Summanden}}=\underbrace{(a+\cdots+a)}_{n\text{ Summanden}}+\underbrace{(b+\cdots+b)}_{n\text{ Summanden}}=na+nb.$$

Für $n \leq -1$ folgt analog:

$$n(a+b) = -\underbrace{\big((a+b)+\cdots+(a+b)\big)}_{-n \text{ Summanden}} = -\underbrace{(a+\cdots+a)}_{-n \text{ Summanden}} - \underbrace{(b+\cdots+b)}_{-n \text{ Summanden}} = na + nb.$$

Für $n = 0$ ist die Aussage trivial: $0(a+b) = 0 = 0 + 0 = 0a + 0b$.

(b) Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Sind n und m beide positiv, dann gilt $n + m > 0$ und wir erhalten:

$$na + ma = \underbrace{a+\cdots+a}_{n \text{ Summanden}} + \underbrace{a+\cdots+a}_{m \text{ Summanden}} = \underbrace{a+\cdots+a}_{n+m \text{ Summanden}} = (n+m)a.$$

Sind n und m beide negativ, dann gilt $n + m < 0$ und wir erhalten:

$$na + ma = -\underbrace{(a+\cdots+a)}_{-n \text{ Summanden}} - \underbrace{(a+\cdots+a)}_{-m \text{ Summanden}} = \underbrace{-(a+\cdots+a)}_{(-n)+(-m)=-(n+m) \text{ Summanden}} = (n+m)a.$$

Ist n oder m gleich 0, so ist die Aussage trivial. Wir betrachten nun n und m mit unterschiedlichen Vorzeichen. O.B.d.A. sei $m < 0 < n$. Gilt $n = -m$ erhalten wir:

$$na + ma = \underbrace{a+\cdots+a}_{n \text{ Summanden}} - \underbrace{(a+\cdots+a)}_{-m \text{ Summanden}} = 0 = 0a = (n+m)a.$$

Ist $n > -m$ dann gilt $n + m > 0$ und wir erhalten:

$$na + ma = \underbrace{a+\cdots+a}_{n \text{ Summanden}} - \underbrace{(a+\cdots+a)}_{-m \text{ Summanden}} = \underbrace{a+\cdots+a}_{n-(-m)=n+m \text{ Summanden}} = (n+m)a.$$

Ist $n < -m$ dann gilt $m + n < 0$ und wir erhalten:

$$na + ma = \underbrace{a+\cdots+a}_{n \text{ Summanden}} - \underbrace{(a+\cdots+a)}_{-m \text{ Summanden}} = \underbrace{-(a+\cdots+a)}_{-m-n=-(n+m) \text{ Summanden}} = (n+m)a$$

(c) Das einfachste Beispiel ist wohl $A = \mathbb{Z}_2$, $a = \bar{0}$, $b := \bar{1}$.