Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

5. Übungsblatt für die Woche vom 1. bis 5. April 2019

Aufgabe 5.1. Sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AB \equiv AC$. Weiters seien $B' \in (BC)$ und $C' \in (B'C)$ so, dass $BB' \equiv CC'$. Zeige, dass $AB'C'$ ein gleichschenkeliges Dreieck bildet.

Aufgabe 5.2. Seien AB und $A'B'$ zwei Strecken, die nicht in einer Geraden liegen und denselben Mittelpunkt M besitzen. Es gilt daher $MA \equiv MB$ und $MA' \equiv MB'$.
(a) Zeige $AA' \equiv BB'$.
(b) Sei weiters $A'' \in (AA')$ und bezeichne B'' den Schnittpunkt von $g(A'', M)$ mit (BB'). Zeige $MA'' \equiv MB''$.

Aufgabe 5.3. Seien A, B, A', B' vier Punkte, sodass je drei ein Dreieck bilden. Weiters sei das Dreieck $AA'B$ kongruent zum Dreieck $BB'A$. Zeige, dass dann auch die Dreiecke $A'AB'$ und $B'BA'$ kongruent sind.

Aufgabe 5.4. In Euklids Buch I§7 findet sich folgende Aussage: *Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden wie die ursprünglichen Strecken ansetzend, auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammenzubringen.* Erkläre, was damit gemeint ist und beweise es.

Aufgabe 5.5. Sei ABC ein Dreieck und $X \in (AB)$. Zeige

$$|CX| < \max\{|CA|, |CB|\}.$$

Hinweis: O.B.d.A. sei $|CB| \leq |CA|$. Es genügt daher $|CX| < |CA|$ zu zeigen. Verwende den Satz vom Außenwinkel und die Tatsache, dass im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, und umgekehrt.

Bisher haben wir $|AB|$ nur für Strecken AB definiert, im degenerierten Fall setzen wir nun $|AA| := 0$. Es gilt daher $A = B \Leftrightarrow |AB| = 0$.

Aufgabe 5.6. Seien A, B, C drei beliebige Punkte, $a := |BC|$, $b := |CA|$ und $c := |AB|$.
(a) Zeige, $a \leq b + c$, $b \leq c + a$ und $c \leq a + b$. Hinweis: Aufgrund der Dreiecksungleichung der Vorlesung können die Punkte A, B, C o.B.d.A. kollinear vorausgesetzt werden.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(b) Für $X \in (AB)$ zeige $|CX| \leq \max\{a, b\}$. Hinweis: Nach Aufgabe 5.5 können die Punkte A, B, C o.B.d.A. kollinear vorausgesetzt werden. Erkläre, warum einer der Fälle $C*X*B$, $C = X$ oder $A * X * C$ eintreten muss und diskutiere diese Fälle einzeln.

Aufgabe 5.7. Sei M ein Punkt und $r > 0 \in \mathcal{P}$. Betrachte die Mengen (Kreisscheiben)

$$K := \{X \in \mathcal{E} : |MX| < r\} \qquad \text{und} \qquad \bar{K} := \{X \in \mathcal{E} : |MX| \leq r\}.$$

Zeige, dass K und $\bar{K}$ konvex sind. Hinweis: Verwende Aufgabe 5.6(b).

Aufgabe 5.8. Sei OAB ein gleichschenkeliges Dreieck mit $OA \equiv OB$. Seien A' und B' zwei weitere Punkte auf den Schenkeln, sodass $O * A' * A$ und $O * B' * B$ und $A'A \equiv B'B$ gilt. Bezeichne X den Schnittpunkt von (AB') und $(A'B)$, vgl. Aufgabe 3.8. Weiters sei M der Schnittpunkt von $g(O, X)$ mit (AB). Fertige eine Skizze an und zeige der Reihe nach:

(a) Die Dreiecke $AA'B$ und $BB'A$ sind kongruent.
(b) Die Dreiecke $AA'X$ und $BB'X$ sind kongruent.
(c) Die Dreiecke OAX und OBX sind kongruent.
(d) Die Dreiecke OMA und OMB sind kongruent.

Schließe daraus, dass $(OX{>}$ die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle AOB$ ist und M mit dem Mittelpunkt der Strecke AB übereinstimmt.