Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

5. Übungsblatt für die Woche vom 1. bis 5. April 2019

Aufgabe 5.1. Sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AB \equiv AC$. Weiters seien $B' \in (BC)$ und $C' \in (B'C)$ so, dass $BB' \equiv CC'$. Zeige, dass $AB'C'$ ein gleichschenkeliges Dreieck bildet.

Aufgabe 5.2. Seien AB und $A'B'$ zwei Strecken, die nicht in einer Geraden liegen und denselben Mittelpunkt M besitzen. Es gilt daher $MA \equiv MB$ und $MA' \equiv MB'$.

(a) Zeige $AA' \equiv BB'$.

(b) Sei weiters $A'' \in (AA')$ und bezeichne B'' den Schnittpunkt von $g(A'', M)$ mit (BB'). Zeige $MA'' \equiv MB''$.

Aufgabe 5.3. Seien A, B, A', B' vier Punkte, sodass je drei ein Dreieck bilden. Weiters sei das Dreieck $AA'B$ kongruent zum Dreieck $BB'A$. Zeige, dass dann auch die Dreiecke $A'AB'$ und $B'BA'$ kongruent sind.

Aufgabe 5.4. In Euklids Buch I§7 findet sich folgende Aussage: *Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden wie die ursprünglichen Strecken ansetzend, auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammenzubringen.* Erkläre, was damit gemeint ist und beweise es.

Aufgabe 5.5. Sei ABC ein Dreieck und $X \in (AB)$. Zeige

$$|CX| < \max\{|CA|, |CB|\}.$$

Hinweis: O.B.d.A. sei $|CB| \leq |CA|$. Es genügt daher $|CX| < |CA|$ zu zeigen. Verwende den Satz vom Außenwinkel und die Tatsache, dass im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, und umgekehrt.

Bisher haben wir $|AB|$ nur für Strecken AB definiert, im degenerierten Fall setzen wir nun $|AA| := 0$. Es gilt daher $A = B \Leftrightarrow |AB| = 0$.

Aufgabe 5.6. Seien A, B, C drei beliebige Punkte, $a := |BC|$, $b := |CA|$ und $c := |AB|$.

(a) Zeige, $a \leq b + c$, $b \leq c + a$ und $c \leq a + b$. Hinweis: Aufgrund der Dreiecksungleichung der Vorlesung können die Punkte A, B, C o.B.d.A. kollinear vorausgesetzt werden.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

(b) Für $X \in (AB)$ zeige $|CX| \leq \max\{a, b\}$. Hinweis: Nach Aufgabe 5.5 können die Punkte A, B, C o.B.d.A. kollinear vorausgesetzt werden. Erkläre, warum einer der Fälle $C*X*B$, $C = X$ oder $A * X * C$ eintreten muss und diskutiere diese Fälle einzeln.

Aufgabe 5.7. Sei M ein Punkt und $r > 0 \in \mathcal{P}$. Betrachte die Mengen (Kreisscheiben)

$$K := \{X \in \mathcal{E} : |MX| < r\} \qquad \text{und} \qquad \bar{K} := \{X \in \mathcal{E} : |MX| \leq r\}.$$

Zeige, dass K und $\bar{K}$ konvex sind. Hinweis: Verwende Aufgabe 5.6(b).

Aufgabe 5.8. Sei OAB ein gleichschenkeliges Dreieck mit $OA \equiv OB$. Seien A' und B' zwei weitere Punkte auf den Schenkeln, sodass $O * A' * A$ und $O * B' * B$ und $A'A \equiv B'B$ gilt. Bezeichne X den Schnittpunkt von (AB') und $(A'B)$, vgl. Aufgabe 3.8. Weiters sei M der Schnittpunkt von $g(O, X)$ mit (AB). Fertige eine Skizze an und zeige der Reihe nach:
(a) Die Dreiecke $AA'B$ und $BB'A$ sind kongruent.
(b) Die Dreiecke $AA'X$ und $BB'X$ sind kongruent.
(c) Die Dreiecke OAX und OBX sind kongruent.
(d) Die Dreiecke OMA und OMB sind kongruent.

Schließe daraus, dass $(OX>$ die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle AOB$ ist und M mit dem Mittelpunkt der Strecke AB übereinstimmt.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 5.1. Da die Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks kongruent sind, gilt $\angle ABC \equiv \angle ACB$. Nach dem SWS Kongruenzsatz sind daher die Dreiecke ABB' und ACC' kongruent. Insbesondere erhalten wir $AB' \equiv AC'$, also ist das Dreieck $AB'C'$ gleichschenkelig.

Zu Aufgabe 5.2. (a) Da Scheitelwinkel kongruent sind haben wir $\angle AMA' \equiv \angle BMB'$. Nach dem SWS Kongruenzsatz sind daher die Dreiecke AMA' und BMB' kongruent. Insbesondere erhalten wir $AA' \equiv BB'$.

(b) Der Schnittpunkt B'' existiert, da der Halbstrahl $A''(M>$ im Inneren des Winkels $\angle BMB'$ liegt und daher die Sehne (BB') treffen muss. Wieder gilt $\angle AMA'' \equiv \angle BMB''$, denn dies sind Scheitelwinkel. Aus der Kongruenz der Dreiecke AMA' und BMB' in (a) erhalten wir auch $\angle MAA' \equiv \angle MBB'$ und daher $\angle MAA'' \equiv \angle MBB''$. Nach dem WSW Kongruenzsatz sind die Dreiecke AMA'' und BMB'' daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $MA'' \equiv MB''$.

Zu Aufgabe 5.3. Dies folgt unmittelbar aus dem SSS Kongruenzsatz. Nach Voraussetzung gilt nämlich $A'A \equiv B'B$ und $AB' \equiv BA'$. Da die beiden Dreiecke $A'AB'$ und $B'BA'$ die Seite $A'B'$ gemein haben, müssen also sie kongruent sein.

Zu Aufgabe 5.4. Eine Möglichkeit dies zu formulieren, wäre: *Ist AB eine Strecke und sind C und C' zwei Punkte auf derselben Seite von $g(A, B)$, die $AC \equiv AC'$ und $BC \equiv BC'$ genügen, dann gilt schon $C = C'$.* Zum Beweis: Aus dem SSS Kongruenzsatz folgt $\angle CAB \equiv \angle C'AB$ und dann $C = C'$ mit den Eindeutigkeitsaussagen der Axiome K5 und K2.

Zu Aufgabe 5.5. O.B.d.A. sei $|CB| \leq |CA|$. Es genügt $|CX| < |CA|$ zu zeigen. Da der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, haben wir

$$\sphericalangle CAB \leq \sphericalangle CBA,$$

siehe Satz 1.4.25 falls $|CB| < |CA|$ bzw. Satz 1.4.4 falls $|CB| = |CA|$. Nach dem Satz von Außenwinkel gilt

$$\sphericalangle CBA < \sphericalangle CXA.$$

Kombinieren wir die beiden Ungleichungen, folgt $\sphericalangle CAB < \sphericalangle CXA$ und daher auch

$$\sphericalangle CAX < \sphericalangle CXA.$$

Da dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber liegt, erhalten wir $|CX| < |CA|$.

Zu Aufgabe 5.6. (a) O.B.d.A. seien die Punkte A, B, C kollinear, vgl. Satz 1.4.26. Fallen zwei der drei Punkte zusammen, dann sind alle drei Ungleichungen trivialerweise erfüllt. Gilt etwa $A = B$, so ist $0 \le a = b$ und $c = 0$, also $a \le b = b + 0 = b + c$, $b \le a = 0 + a = c + a$ sowie $c = 0 \le a + b$. O.B.d.A. seien daher A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden. O.B.d.A. genügt es den Fall $A * C * B$ zu betrachten, vgl. Axiom A3. Es gilt daher $0 < a < c$, $0 < b < c$ und $c = a + b$. Wir erhalten $a < c < b + c$, $b < c < c + a$ und $c \le a + b$.

(b) O.B.d.A. seien die Punkte A, B, C kollinear, vgl. Aufgabe 5.5. Da $X \in (AB)$ erhalten wir die Zerlegung

$$g(A, B) = {<}AX) \cup \{X\} \cup (XB{>}.$$

Der Punkt C muss daher in einer der drei Mengen ${<}AX)$, $\{X\}$ oder $(XB{>}$ liegen. Somit muss einer der folgenden drei Fälle eintreten:

$$C * X * B \qquad \text{oder} \qquad C = X \qquad \text{oder} \qquad A * X * C.$$

Im Fall $C * X * B$ erhalten wir $|CX| < |CB| = a$. Im Fall $C = X$ erhalten wir $|CX| = 0$. Im Fall $A * X * C$ erhalten wir $|CX| < |CA| = b$. In jedem Fall gilt daher $|CX| \le \max\{a, b\}$.

Zu Aufgabe 5.7. Seien A und B zwei Punkte in K. Es genügt $(AB) \subseteq K$ zu zeigen. Sei dazu $X \in (AB)$. Nach Voraussetzung gilt $|MA| < r$ und $|MB| < r$. Aus Aufgabe 5.6(b) erhalten wir $|MX| \le \max\{|MA|, |MB|\} < r$, also $X \in K$.

Analog kann bei der (abgeschlossenen) Kreisscheibe $\bar{K}$ vorgegangen werden, alle strikten Gleichheitszeichen müssen dann durch $\le$ ersetzt werden.

Zu Aufgabe 5.8. (a) Die Kongruenz der Dreiecke $AA'B$ und $BB'A$ folgt aus dem SWS Kongruenzsatz, denn die beiden Dreiecke haben die Seite AB gemein, nach Voraussetzung gilt $AA' \equiv BB'$ und die Basiswinkel des gleichschenkeligen Dreiecks AOB sind kongruent, d.h. $\angle OAB \equiv \angle OBA$.

(b) Die Kongruenz der Dreiecke $AA'X$ und $BB'X$ folgt aus dem SWW Kongruenzsatz, denn nach Voraussetzung gilt $AA' \equiv BB'$, aus (a) erhalten wir $\angle AA'X \equiv \angle BB'X$ und die Scheitelwinkel sind kongruent, d.h. $\angle A'XA \equiv \angle B'XB$.

(c) Die Kongruenz der Dreiecke OAX und OBX folgt aus dem SSS Kongruenzsatz, denn die beiden Dreiecke haben die Seite OX gemein, es gilt $OA \equiv OB$ nach Voraussetzung und $AX \equiv BX$ nach (b).

(d) Die Kongruenz der Dreiecke OMA und OMB folgt aus dem SWS Kongruenzsatz, denn die beiden Dreiecke haben die Seite OM gemein, nach Voraussetzung gilt $OA \equiv OB$ und aus (c) erhalten wir $\angle AOM \equiv \angle BOM$.