Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

7. Übungsblatt für die Woche vom 29. April bis 3. Mai 2019

Aufgabe 7.1 (S:S:S Ähnlichkeitssatz). Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke mit Seitenlängen $a := |BC|$, $b := |CA|$, $c := |AB|$, $a' := |B'C'|$, $b' := |C'A'|$, $c' := |A'B'|$, sodass

$$a/a' = b/b' = c/c'.$$

Zeige, dass die beiden Dreiecke ähnlich sind, d.h. es gilt auch

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta' \qquad \text{und} \qquad \gamma = \gamma'.$$

Hinweis: Analog zum Beweis des S:W:S Ähnlichkeitssatzes in der Vorlesung, lässt sich dies mit dem W:W:W Ähnlichkeitssatz auf den SSS Kongruenzsatz zurückführen. Betrachte dazu ein drittes Dreieck $A''B''C''$ mit $c'' = c'$, $\alpha'' = \alpha$ und $\beta'' = \beta$.

Aufgabe 7.2. Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte, sodass C und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ liegen. Zeige, dass die vier Punkte genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$ gilt. Hinweis: Gehe analog zur Vorlesung vor (Satz 1.5.32).

Aufgabe 7.3 (Sehnensatz). Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem inneren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Verwende den Peripheriewinkelsatz, um die Dreiecke ASB' und $A'SB$ zu vergleichen. Wie lässt sich daraus der Höhensatz für rechtwinkelige Dreiecke folgern?

Aufgabe 7.4 (Sekanten-Tangentensatz). Sei AB eine Sehne eines Kreises und T ein weiterer Punkt des Kreises, sodass die Gerade $g(A, B)$ die Tangente bei T in einem äußeren Punkt S des Kreises trifft. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |ST|^2.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $S * A * B$ annehmen dürfen und warum T nicht auf $g(A, B)$ liegen kann. Verwende dann den Tangentenwinkelsatz, um die Dreiecke AST und TSB zu vergleichen. Bleibt die Gleichung $|SA| \cdot |SB| = |ST|^2$ gültig, wenn der Schnittpunkt S am Kreis liegt?

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 7.5 (Sekantensatz). Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem äußeren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $S * A * B$ und $S * A' * B'$ annehmen können. Verwende dann den Peripheriewinkelsatz, um die Dreiecke ASB' und $A'SB$ zu vergleichen. Gib auch einen zweiten Beweis mit Hilfe der vorangehenden Aufgabe. Bleibt die Gleichung $|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|$ gültig, wenn der Schnittpunkt S am Kreis liegt?

Aufgabe 7.6 (Sehnenviereck). Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und bezeichne S den Schnittpunkt der beiden Diagonalen (AC) und (BD). Zeige, dass die vier Punkte A, B, C, D genau dann auf einem Kreis liegen, wenn

$$|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|.$$

Hinweis: Die eine Implikation folgt sofort aus dem Sehnensatz. Verwende den Peripheriewinkelsatz, um die andere Implikation zu zeigen.

Aufgabe 7.7. Seien g und h zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden. Zeige, dass die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X, g) = d(X, h)\}$$

Vereinigung zweier orthogonaler Geraden ist. Hinweis: Verwende die Beschreibung der Winkelsymmetrale aus der Vorlesung.

Aufgabe 7.8. Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeige, dass es genau vier Kreise gibt, die jede der drei Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$ und $g(C, A)$ berühren. Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.