Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

7. Übungsblatt für die Woche vom 29. April bis 3. Mai 2019

AUFGABE 7.1 (S:S:S Ähnlichkeitssatz). Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke mit Seitenlängen $a := |BC|$, $b := |CA|$, $c := |AB|$, $a' := |B'C'|$, $b' := |C'A'|$, $c' := |A'B'|$, sodass

$$a/a' = b/b' = c/c'.$$

Zeige, dass die beiden Dreiecke ähnlich sind, d.h. es gilt auch

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta' \qquad \text{und} \qquad \gamma = \gamma'.$$

Hinweis: Analog zum Beweis des S:W:S Ähnlichkeitssatzes in der Vorlesung, lässt sich dies mit dem W:W:W Ähnlichkeitssatz auf den SSS Kongruenzsatz zurückführen. Betrachte dazu ein drittes Dreieck $A''B''C''$ mit $c'' = c'$, $\alpha'' = \alpha$ und $\beta'' = \beta$.

AUFGABE 7.2. Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte, sodass C und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ liegen. Zeige, dass die vier Punkte genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$ gilt. Hinweis: Gehe analog zur Vorlesung vor (Satz 1.5.32).

AUFGABE 7.3 (Sehnensatz). Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem inneren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Verwende den Peripheriewinkelsatz, um die Dreiecke ASB' und $A'SB$ zu vergleichen. Wie lässt sich daraus der Höhensatz für rechtwinkelige Dreiecke folgern?

AUFGABE 7.4 (Sekanten-Tangentensatz). Sei AB eine Sehne eines Kreises und T ein weiterer Punkt des Kreises, sodass die Gerade $g(A, B)$ die Tangente bei T in einem äußeren Punkt S des Kreises trifft. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |ST|^2.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $S * A * B$ annehmen dürfen und warum T nicht auf $g(A, B)$ liegen kann. Verwende dann den Tangentenwinkelsatz, um die Dreiecke AST und TSB zu vergleichen. Bleibt die Gleichung $|SA| \cdot |SB| = |ST|^2$ gültig, wenn der Schnittpunkt S am Kreis liegt?

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 7.5 (Sekantensatz). Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem äußeren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $S * A * B$ und $S * A' * B'$ annehmen können. Verwende dann den Peripheriewinkelsatz, um die Dreiecke ASB' und $A'SB$ zu vergleichen. Gib auch einen zweiten Beweis mit Hilfe der vorangehenden Aufgabe. Bleibt die Gleichung $|SA|\cdot|SB| = |SA'| \cdot |SB'|$ gültig, wenn der Schnittpunkt S am Kreis liegt?

Aufgabe 7.6 (Sehnenviereck). Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und bezeichne S den Schnittpunkt der beiden Diagonalen (AC) und (BD). Zeige, dass die vier Punkte A, B, C, D genau dann auf einem Kreis liegen, wenn

$$|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|.$$

Hinweis: Die eine Implikation folgt sofort aus dem Sehnensatz. Verwende den Peripheriewinkelsatz, um die andere Implikation zu zeigen.

Aufgabe 7.7. Seien g und h zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden. Zeige, dass die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X, g) = d(X, h)\}$$

Vereinigung zweier orthogonaler Geraden ist. Hinweis: Verwende die Beschreibung der Winkelsymmetrale aus der Vorlesung.

Aufgabe 7.8. Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeige, dass es genau vier Kreise gibt, die jede der drei Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$ und $g(C, A)$ berühren. Hinweis: Verwende die vorangehende Aufgabe.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 7.1. Nach dem W:W:W Ähnlichkeitssatz sind die Dreiecke ABC und $A''B''C''$ ähnlich. Insbesondere gilt $a''/a = b''/b = c''/c$. Mit der Voraussetzung $a/a' = b/b' = c/c'$ folgt $a''/a' = b''/b' = c''/c' = 1$, also $a'' = a'$ und $b'' = b'$. Nach dem SSS Kongruenzsatz sind die Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ daher kongruent. Damit ist ABC auch dem Dreieck $A'B'C'$ ähnlich.

Zu Aufgabe 7.2. Wir nehmen zunächst an, dass die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreis liegen. Da C und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ liegen, bilden die Tangentenwinkel zu C und D Nebenwinkel bei A, ihre Summe ist daher $2R$. Mit dem Tangentenwinkelsatz folgt $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$.

Für die umgekehrte Implikation sei nun $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$. Bezeichne Γ den Kreis durch A, B, C und Γ' den Kreis durch A, B, D. Mit dem Tangentenwinkelsatz sehen wir, dass sich die Tangentenwinkel für C und D bei A zu $2R$ addieren. Daher stimmen die Tangenten an Γ und Γ' bei A überein. Die Mittelpunkte beider Kreise müssen daher auf der Normalen durch A auf diese Tangente liegen. Beide Mittelpunkte müssen aber auch auf der Streckensymmetrale von AB liegen. Die Normale und die Streckensymmetrale können nicht parallel sein, denn sonst wäre nach dem Stufenwinkelsatz die Normale orthogonal auf $g(A, B)$ und die Tangente würde daher durch B laufen, was nicht möglich ist. Daher schneiden sich die Normale und die Streckensymmetrale nur in einem Punkt. Also müssen die Mittelpunkte von Γ und Γ' übereinstimmen. Da die beiden Kreise gemeinsame Punkte haben, folgt $\Gamma = \Gamma'$, also liegen alle vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreis.

Zu Aufgabe 7.3. O.B.d.A. seien A, B, A', B' vier verschiedene Punkte am Kreis. Da sich die Sehnen schneiden, liegen die Punkte B und B' auf derselben Seite von $g(A, A')$ wie S. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt

$$\angle ABA' \equiv \angle AB'A'.$$

Weiters ist $\angle ASB' \equiv \angle A'SB$, denn dies sind Scheitelwinkel. Nach dem W:W:W Ähnlichkeitssatz sind die Dreiecke ASB' und $A'SB$ daher ähnlich. Insbesondere gilt $\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$, also $|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|$. Da in einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse und die Höhe Sehnen im Umkreis bilden, liefert der Sehnensatz in diesem Fall $pq = hh$, also den Höhensatz.

Zu Aufgabe 7.4. Da die Tangente den Kreis nur in T schneidet, kann sie nicht mit $g(A, B)$ zusammenfallen. Da beide Geraden den Punkt S enthalten, kann T nicht auf $g(A, B)$ liegen. Da (AB) zur Gänze im Inneren des Kreises liegt, vgl. Aufgabe 5.5, kann S nicht zwischen A und B liegen. Da A und B am Kreis liegen, muss S auch verschieden von A und B sein. Damit bleiben nur die Fälle $S * A * B$ oder $A * B * S$ übrig. Durch Vertauschen von A mit B kann daher o.B.d.A. $S * A * B$ angenommen werden. Also liegen S und B auf verschiedenen Seiten von $g(A, T)$. Aus dem Tangentenwinkelsatz erhalten wir daher

$$\angle STA \equiv \angle SBT.$$

Da auch $\angle AST = \angle TSB$, folgt mit dem W:W:W Kongruenzsatz, dass die Dreiecke AST und TSB ähnlich sind. Insbesondere gilt $\frac{|ST|}{|SB|} = \frac{|SA|}{|ST|}$, also $|ST|^2 = |SA| \cdot |SB|$. Liegt S am Kreis, dann gilt $|ST|^2 = 0 = |SA| \cdot |SB|$, denn in diesem Fall muss $S = T = A$ oder $S = T = B$ sein.

Zu Aufgabe 7.5. O.B.d.A. seien A, B, A', B' vier verschiedene Punkte am Kreis. Durch Umbenennen der Punkte können wir o.B.d.A. auch $S * A * B$ und $S * A' * B'$ annehmen. Daher liegen B und B' auf derselben Seite von $g(A, A')$, nämlich gegenüber von S. Aus dem Peripheriewinkelsatz erhalten wir daher

$$\angle SB'A \equiv \angle SBA'.$$

Da auch $\angle ASB' = \angle A'SB$, folgt mit dem W:W:W Kongruenzsatz, dass die Dreiecke ASB' und $A'SB$ ähnlich sind. Insbesondere gilt $\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$, also $|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|$. Ein alternative Beweis dieser Gleichung geht wie folgt: Da S im Äußeren des Kreises liegt, existiert ein Punkt T am Kreis, sodass $g(T, S)$ Tangente ist, und wir erhalten $|SA| \cdot |SB| = |ST|^2 = |SA'| \cdot |SB'|$ durch zweimaliges Anwenden der vorangehenden Aufgabe. Liegt S am Kreis, dann gilt $|SA| \cdot |SB| = 0 = |SA'| \cdot |SB'|$, denn in diesem Fall muss $S = A = A'$ oder $S = A = B'$ oder $S = B = A'$ oder $S = B = B'$ sein.

Zu Aufgabe 7.6. Die eine Implikation folgt unmittelbarr aus dem Sehnensatz. Für die umgekehrte Implikation sei nun $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$. Daher

$$\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|SD|}{|SC|} \qquad \text{sowie} \qquad \angle ASD \equiv \angle BSC,$$

denn dies sind Scheitelwinkel. Nach dem S:W:S Ähnlichkeitssatz sind die Dreiecke ASD und BSC daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $\angle SDA \equiv \angle SCB$, also $\angle BDA \equiv \angle ACB$. Da C und D auf derselben Seite von $g(A,B)$ liegen, müssen die vier Punkte A, B, C, D nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes auf einem Kreis liegen.

Zu Aufgabe 7.7. Beim Schnitt der beiden Geraden entstehen vier Winkel, deren Innere wir mit W_1, W_2, W_3, W_4 bezeichnen. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass W_1 und W_3 Scheitelwinkel bilden und daher auch W_2 und W_4 Scheitelwinkel sind. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\{X \in W_i : d(X,g) = d(X,h)\}$ mit der Winkelsymmetrale s_i von W_i übereinstimmt. Der einzige Punkt auf $g \cup h$, der von beiden Geraden denselben Abstand hat, ist ihr Schnittpunkt S. Da $\mathcal{E} = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup g \cup h$, erhalten wir

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X,g) = d(X,h)\} = s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup s_4 \cup \{S\}.$$

Da W_1 und W_3 Scheitelwinkel sind und s_1 den Winkel W_1 halbiert, muss die andere Seite der Trägergeraden von s_1 den Winkel W_3 halbieren und daher mit s_3 übereinstimmen. Also bildet $s_1 \cup \{S\} \cup s_3$ eine Gerade. Ebenso ist $s_2 \cup \{S\} \cup s_4$ eine Gerade. Da s_2 den Winkel W_2 halbiert und die Winkelhälften von W_1 und W_3 gleich groß sind, haben wir $\angle(s_1, s_2) \equiv \angle(s_3, s_2)$, also ist $\angle(s_1, s_2)$ ein rechter Winkel. Daher stehen die Trägergeraden der Winkelsymmetralen orthogonal aufeinander.

Zu Aufgabe 7.8. Der Mittelpunkt eines Kreises, der $g(A,B)$ und $g(B,C)$ berührt, muss von beiden Geraden denselben positiven Normalabstand haben. Umgekehrt ist jeder Punkt, der von $g(A,B)$ und $g(B,C)$ denselben positiven Normalabstand hat, Mittelpunkt eines eindeutigen Kreises, der beide Geraden berührt. Die Menge der Mittelpunkte aller Kreise, die $g(A,B)$, $g(B,C)$ und $g(C,A)$ berühren ist daher

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{E} : d(X, g(A,B)) = d(X, g(B,C)) = d(X, g(C,A))\}.$$

Beachte, dass die Normalabstände nicht alle verschwinden können, da die Punkte A, B, C nicht kollinear sind. Nach dem vorangehenden Beispiel gilt

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X, g(C,A)) = d(X, g(A,B))\} = g \cup g'$$

wobei g und g' die Trägergeraden der vier Winkelsymmetralen bei A bezeichnen und

$$\{X \in \mathcal{E} : d(X, g(A,B)) = d(X, g(B,C))\} = h \cup h'$$

wobei h und h' die Trägergeraden der vier Winkelsymmetralen bei B bezeichnen. Darüber hinaus haben wir $g \perp g'$ und $h \perp h'$. Wir erhalten

$$\mathcal{M} = (g \cup g') \cap (h \cup h') = (g \cap h) \cup (g \cap h') \cup (g' \cap h) \cup (g' \cap h').$$

Die Bezeichnung sei so gewählt, dass g und h die Winkelsymmetralen des Dreiecks ABC bei A und B enthalten. Daher schneiden sich g und h in einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt. Die beiden Geraden g und h können nicht orthogonal sein, denn sonst würden beim Schnitt von h mit $g(A,C)$ und $g(B,C)$ kongruente Wechselwinkel entstehen, was nicht möglich ist, da $g(A,C)$ und $g(B,C)$ nicht parallel sind. Mit dem Stufenwinkelsatz folgt, dass g' und h nicht parallel sein können und sich daher in einem Punkt schneiden. Analog schneiden sich auch g und h' in einem Punkt. Eine weitere Anwendung des Stufenwinkelsatzes zeigt, dass auch g' und h' nicht parallel sein können und sich daher in einem Punkt schneiden. Wir erhalten daher genau vier Mittelpunkte und somit vier Kreise.